República Bolivariana de Venezuela

Ministerio de la Defensa

Universidad Nacional Experimental Politécnica de la Fuerza Armada

Núcleo Caracas

Curso de Inducción Universitaria CIU

Cátedra: ***Razonamiento Matemático***

PRODUCTOS NOTABLES

GUIA CIU NRO: 6

COMISIÓN DE APOYO DE RAZONAMIENTO MATEMATICO

INTEGRANTES:

Ing. Beliana Gómez

Ing. Elvia Moreno

Ing. Mixef Rojas

Lic. Teresa Gómez

Prof. Neida González

En matemáticas existen productos de expresiones algebraicas que dadas sus especiales características, se les ha desarrollado fórmulas de solución directa. Tales productos son conocidos como "productos notables" y son herramientas fundamentales al momento de factorizar (siguiente capítulo). Son tan importantes que en el transcurso de cualquier carrera y en cursos avanzados, se presentan productos notables en muchas situaciones prácticas y en la solución de ejercicios.
Vamos a estudiar estos productos notables con algunos ejemplos, pero el solo estudio no brindará el dominio necesario, **¡¡¡¡ tienen que practicar y ejercitarse !!!!**

Caso 1.- Binomio al cuadrado:

Es un producto de la forma $(a \pm b)^2$

a.) **Si los términos se suman**.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

Aplicando la propiedad distributiva a la última expresión :

$$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 \qquad \left(\text{Recuerde que } ab = ba\right)$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

b.) **Si los términos se restan**.

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$

Aplicando la propiedad distributiva a la última expresión:

$$(a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2 \qquad \left(\text{Recuerde que } ab = ba\right)$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Podemos concluir que: $\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}$

El desarrollo de un binomio elevado al cuadrado resulta un Trinomio Cuadrado Perfecto. Dicho desarrollo del binomio es:

- El primer término (a) al cuadrado: a^2
- $\pm$ el doble producto del primer término por el segundo: 2ab
- El segundo término (b) al cuadrado: b^2

Donde el segundo término del trinomio lleva el signo del segundo término del binomio. Además, el primer y tercer términos del trinomio **siempre** son positivos.

***ERROR COMUN*:**

$(x+5)^2 = x^2 + 25$	lo ***correcto es*** $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$
$(y-3)^2 = y^2 - 9$	lo ***correcto es*** $(y-3)^2 = y^2 - 6y + 9$

Evite confusiones y analice **muy bien** los siguientes ejemplos.

Ej. 1. Desarrolle $(x+8)^2$

Solución:

Identificamos los términos del polinomio

x es el primer término

8 es el segundo término

Aplicamos la fórmula para un binomio al cuadrado $\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

$$(x+8)^2 = x^2 + 2(x)\,(8) + (8)^2$$
$$= x^2 + 16x + 64$$

El primero al cuadrado + dos veces el primero por el segundo + el segundo al cuadrado.

Ej. 2. Desarrolle $(m-4)^2$

Solución:

Identificamos los términos del polinomio

m es el primer término , 4 es el segundo término

Aplicamos la fórmula para un binomio al cuadrado $\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

$$(m-4)^2 = m^2 - 2(m)\,(4) + (4)^2$$
$$= m^2 - 8m + 16$$

El primero al cuadrado - dos veces el primero por el segundo + el segundo al cuadrado.

***ERROR COMUN*:** $(m-4)^2 = m^2 - 2(m)(-4) + (4)^2$ Este signo está repetido pues ya fue considerado en el desarrollo: -2*m*(4) $(m-4)^2 = m^2 + 8m + 16$	*La solución correcta es la que se dá en el ejemplo*

Ej. 3. Desarrolle $(4x-2)^2$

Solución:

Identificamos los términos del polinomio

$4x$ es el primer término, 2 es el segundo término

Aplicamos la fórmula para un binomio al cuadrado $\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

$$(4x-2)^2 = (4x)^2 - 2(4x)(2) + (2)^2$$
$$= 16x^2 - 16x + 4$$

Recuerde que al elevar *(4x)*^{2} hay que al elevar al cuadrado ambos factores, por eso resulta *16x*^{2}.

Ej. 4. Desarrolle $(2x^2-3x)^2$

Solución:

Identificamos los términos del polinomio

$2x^2$ es el primer término, $3x$ es el segundo término

Aplicamos la fórmula para un binomio al cuadrado $\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

$$(2x^2-3x)^2 = (2x^2)^2 - 2(2x^2)(3x) + (3x)^2$$
$$= 4x^4 - 12x^3 + 9x^2$$

Recuerde la operación Potencia de una Potencia, $(x^2)^2 = x^4$, se coloca la misma base y se multiplican los exponentes

Ej. 5. Desarrolle $(-3x+2)^2$

Solución:

Es preferible colocar el término positivo primero para evitar confusiones, es decir se aplica la propiedad conmutativa de la suma.

$$(-3x+2)^2 = (2-3x)^2$$
$$(2-3x)^2 = (2)^2 - 2(2)(3x) + (3x)^2$$
$$= 4 - 12x + 9x^2$$

Ej. 6. Desarrolle $\left(\frac{-1}{2}x+\frac{1}{4}\right)^2$

Solución:

$$\left(\frac{-1}{2}x+\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x\right)^2$$
$$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}x\right) + \left(\frac{1}{2}x\right)^2$$
$$= \frac{1}{16} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2$$

Recuerde que al elevar una fracción al cuadrado se eleva numerador y denominador a la misma potencia

Ej. 7. Desarrolle $(-4-5x)^2$

Solución:

Observe que ambos términos son negativos. En la próxima sección se estudia la factorización y comprenderá que al factorizar por (-1), podemos transformar la expresión. De momento es importante saber que ante una situación como ésta, resulta práctica y matemáticamente correcta la siguiente igualdad:

$$(-4-5x)^2 = [(-1)\cdot(4+5x)]^2 = (-1)^2\cdot(4+5x)^2 = (4+5x)^2$$

Ambos términos han cambiado de signo sin alterar el valor del resultado, sólo porque el exponente es par.

$$(4+5x)^2 = (4)^2 + 2\cdot(4)\cdot(5x) + (5x)^2 = 16 + 40x + 25x^2$$

Respuesta: $(-4-5x)^2 = (4+5x)^2 = 16 + 40x + 25x^2$

Otra solución es $(-4- 5x)^2 = (-4)^2 - (-4).5x + (-5x)^2 = 16 + 20x + 25x^2$, recuerde que el primer término es -4 y el segundo es -5x. Al aplicar la fórmula, no se escribe el signo del segundo término del trinomio ya que ésta lo que considera previamente.

Caso 2.- Producto de dos binomios con un término común:

Es un producto de la forma $(x+a)(x+b)$ donde el término común (en este caso) es *x*.

Al desarrollar este producto aplicando la propiedad distributiva, tenemos:

$$
\begin{aligned}
(x+a)\cdot(x+b) &= x^2 + xb + ax + ab \\
&= x^2 + xa + xb + ab \\
&= x^2 + x(a+b) + ab
\end{aligned}
$$

Es decir:

$$\boxed{(x+a)\cdot(x+b) = x^2 + x\cdot(a+b) + ab}$$

El cuadrado del término común (x^2) **+** el producto del término común (x) por la suma algebraica de los no comunes ($a+b$) **+** el producto de los términos no comunes (ab).

Ej. 8. Desarrolle $(x-1)(x+3)$

Solución:

El término común es x, términos no comunes –1 y 3

$$
\begin{aligned}
(x-1)(x+3) &= x^2 + (-1+3)x + (-1)(3) \\
&= x^2 + 2x - 3
\end{aligned}
$$

Ej. 9. Desarrolle $(2x-4)(2x-7)$

Solución:

El término común es $2x$, términos no comunes –4 y -7

$$
\begin{aligned}
(2x-4)(2x-7) &= (2x)^2 + (-4-7)(2x) + (-4)(-7) \\
&= 4x^2 + (-11)(2x) + 28 \\
&= 4x^2 - 22x + 28
\end{aligned}
$$

Ej. 10. Desarrolle $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x^2}{3}+\frac{3}{4}\right)$

Solución:

El término común es $\dfrac{x^2}{3}$, términos no comunes $-\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{3}{4}$

$$\left(\frac{x^2}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x^2}{3}+\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{x^2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\left(\frac{x^2}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$=\left(\frac{x^4}{9}\right)+\left(\frac{-2+3}{4}\right)\left(\frac{x^2}{3}\right)-\frac{3}{8}$$
$$=\frac{x^4}{9}+\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{x^2}{3}\right)-\frac{3}{8}$$
$$=\frac{x^4}{9}+\frac{x^2}{12}-\frac{3}{8}$$

Ej. 11. Desarrolle $\left(2xy^2-3y^3\right)\left(2xy^2+2y^3\right)$

Solución:

El término común es $2xy^2$, términos no comunes $-3y^3$ y $2y^3$

$$\left(2xy^2-3y^3\right)\left(2xy^2+2y^3\right)=\left(2xy^2\right)^2+\left(-3y^3+2y^3\right)\left(2xy^2\right)+\left(-3y^3\right)\left(2y^3\right)$$
$$=4x^2y^4+\left(-y^3\right)\left(2xy^2\right)+\left(-6y^6\right)$$
$$=4x^2y^4-2xy^5-6y^6$$

Ej. 12. Desarrolle $\left(2x+3y\right)\left(5y+2x\right)$

Solución:

El término común es $2x$, términos no comunes $3y$ y $5y$

Note que en este caso el término común no aparece como primer término de ambos binomios. Es posible ordenar antes de efectuar el desarrollo.

$$\left(2x+3y\right)\left(2x+5y\right)=(2x)^2+\left[3y+5y\right]2x+(3y)(5y)$$
$$=\ 4x^2+16xy+15y^2$$

¿Qué pasa cuándo los términos no comunes sólo difieren en el signo? Pues bien, se nos presenta el caso de producto notable conocido como suma por diferencia de binomios. El cual será desarrollado más adelante.

Ej. 13. Desarrolle $\left(\frac{1}{3}x^a-y^b+\frac{2}{8}\right)\times\left(\frac{1}{3}x^a-y^b+3\right)$

Solución:

Los términos comunes son $\frac{1}{3}x^a - y^b$, (Estos términos se agrupan para aplicar la regla)

Términos no comunes $\frac{2}{8}$ y 3

$$\left(\frac{1}{3}x^a - y^b + \frac{2}{8}\right)\times\left(\frac{1}{3}x^a - y^b + 3\right) = \left(\frac{1}{3}x^a - y^b\right)^2 + \left(\frac{2}{8}+3\right)\left(\frac{1}{3}x^a - y^b\right) + \left(\frac{2}{8}\cdot 3\right)$$

$$= \frac{1}{9}x^{2a} - 2\cdot\frac{1}{3}x^a y^b + y^{2b} + \frac{26}{8}\left(\frac{1}{3}x^a - y^b\right) + \frac{6}{8}$$

$$= \frac{1}{9}x^{2a} - \frac{2}{3}x^a y^b + y^{2b} + \frac{26}{24}x^a - \frac{26}{8}y^b + \frac{6}{8}$$

$$= \frac{1}{9}x^{2a} - \frac{2}{3}x^a y^b + y^{2b} + \frac{13}{12}x^a - \frac{13}{4}y^b + \frac{3}{4}$$

(Se simplifican las fracciones)

<u>Caso 3.- Suma por diferencia de Binomios:</u>

Es un producto de la forma $(a+b)\cdot(a-b)$

Observe que el término común está representado por "*a*" y los términos no comunes son los mismos pero de signo contrario. Aplicamos el método del apartado anterior y obtenemos:

$$(a+b)(a-b) = a^2 + a(b-b) + (b)(-b)$$

$$= a^2 - b^2$$

Es decir:

$$\boxed{(a+b)\cdot(a-b) \quad = \quad a^2 - b^2}$$

El producto de la suma por la diferencia es una diferencia de cuadrados. Su desarrollo es el término común al cuadrado **<u>menos</u>** el término no común al cuadrado.

Veamos algunos ejemplos:

<u>Ej. 14.</u>Desarrolle $(x-2)(x+2)$

<u>Solución:</u>

$$(x-2)(x+2) = (x)^2 - (2)^2$$

$$= x^2 - 4$$

No tiene importancia cual factor va primero, la suma o la diferencia, ya que el producto cumple con la propiedad conmutativa, es decir:

$$(x-2)(x+2) = (x+2)\ (x-2)$$

Ej. 15. Desarrolle $\left(2x+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(2x-\frac{3}{4}\right)$

Solución:

$$\left(2x+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(2x-\frac{3}{4}\right) = (2x)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 4x^2 - \frac{9}{16}$$

Ej. 16. Desarrolle $(-3a-2b)\cdot(-3a+2b)$

Solución:

$$(-3a-2b)\cdot(-3a+2b) = (-3a)^2 - (2b)^2$$

$$= 9a^2 - 4b^2$$

Note que el término común es $(-3a)$ y los no comunes (-2*b*) y (2*b*) sólo difieren en el signo.

Ej. 17. Desarrolle $(3x-4)\cdot(4-3x)$

Solución:

En este caso, notamos que los términos de los binomios (3*x*) y (4) tienen signos contrarios, es decir no existen términos comunes, por lo tanto no podemos aplicar la regla de Suma Por Diferencia, este ejemplo podemos tratarlo de la siguiente manera:

$$(3x-4)\cdot(4-3x) = 12x - 9x^2 - 16 + 12x$$ (Se aplica la propiedad distributiva)

$$= -9x^2 + 24x - 16$$ (Reducción de términos semejantes.)

Ej. 18. Desarrolle $(2y^3x^4 + 4 - yx)\cdot(2y^3x^4 + 4 + yx)$

Solución:

En este caso notamos que los términos que convienen seleccionar para aplicar el producto de suma por diferencia son: $2y^3x^4+4$ y yx. Entonces lo tratamos de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\left(2y^3x^4+4-yx\right)\cdot(2y^3x^4+4+yx) \\
&= \left(2y^3x^4+4\right)^2-(yx)^2 \\
&= 4y^6x^8+16y^3x^4+16-y^2x^2
\end{aligned}
$$

Ordenando queda: $\left(2y^3x^4+4-yx\right)\cdot(2y^3x^4+4+yx) = 4y^6x^8+16y^3x^4-y^2x^2+16$

Caso 4.- Binomio al cubo:

Es una expresión de la forma $(a\pm b)^3$, vamos a estudiar los casos por separados:

Caso 4. A. $(a+b)^3$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b) \\
&= (a+b)^2(a+b) \\
&= \left(a^2+2ab+b^2\right)(a+b)
\end{aligned}
$$

Aplicamos la fórmula para el binomio al cuadrado

Aplicando la propiedad distributiva

$$= a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3$$

y agrupando términos semejantes tenemos:

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

Es decir,

- el cubo del 1^er término
- + 3 veces el cuadrado del 1^er. término por el 2^do. término
- + 3 veces el 1^er. término por el cuadrado del 2^do. término
- + el cubo del 2^do. término

Observe:

- Los dos términos centrales tienen como factor 3.
- Término a término, ***a*** va descendiendo de grado: 3,2,1 y 0.
- Término a término, ***b*** va ascendiendo de grado: 0,1,2,3.

Ej. 19. Desarrolle $(x+2)^3$

Solución:

$$(x+2)^3 = (x)^3 + 3(x)^2(2) + 3(x)(2)^2 + (2)^3$$
$$= x^3 + 6x^2 + 3x(4) + 8$$
$$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Caso 4. B. $(a-b)^3$

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b)$$
$$= (a-b)^2(a-b)$$
$$= (a^2 - 2ab + b^2)(a-b)$$

Aplicando la propiedad distributiva

$$= a^3 + a^2(-b) + (-2ab)a + (-2ab)(-b) + b^2a + b^2(-b)$$
$$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2b^2a + b^2a - b^3$$

y agrupando términos semejantes tenemos:

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

Es decir:

- el cubo del 1er término
- \- 3 veces el cuadrado del 1$^{er.}$ término por el 2$^{do.}$ término
- \+ 3 veces el 1$^{er.}$ término por el cuadrado del 2$^{do.}$ término
- \- el cubo del 2$^{do.}$ término

Ej. 20. Desarrolle $(2x-3)^3$

Solución:

$$(2x-3)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2(3) + 3(2x)(3)^2 - (3)^3$$
$$= 8x^3 - 3(4x^2)(3) + 3(2x)(9) - 27$$
$$= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$$

Ej. 21. Desarrolle $(x-x^2)^3$

Solución:

$$\left(x - x^2\right)^3 = (x)^3 - 3(x)^2\left(x^2\right) + 3(x)\left(x^2\right)^2 - \left(x^2\right)^3$$
$$= x^3 - 3x^2x^2 + 3xx^4 - x^6$$
$$= x^3 - 3x^4 + 3x^5 - x^6$$

<u>Ej. 22.</u>Desarrolle $\left(\frac{1}{2}x + 2y\right)^3$

<u>Solución:</u>

$$\left(\frac{1}{2}x + 2y\right)^3 = \left(\frac{1}{2}x\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}x\right)^2(2y) + 3\left(\frac{1}{2}x\right)(2y)^2 + (2y)^3$$
$$= \frac{1}{8}x^3 + 3\left(\frac{1}{4}x^2\right)(2y) + 3\left(\frac{1}{2}x\right)\left(4y^2\right) + \left(8y^3\right)$$
$$= \frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{2}x^2y + 6xy^2 + 8y^3$$

<u>Caso 5.- Binomio de Newton:</u>

Cuando se tiene un binomio elevado a una potencia entera positiva, existe un desarrollo general conocido como el ***Teorema del Binomio de Newton***, el cual utiliza una serie de coeficientes que siguen un modelo conocido como el **<u>Triángulo de Pascal</u>**. Este método es muy útil para desarrollar binomios $(a+b)^n$ [n entero positivo] y el Triángulo de Pascal viene dado por:

$(a+b)^0$ → 1
$(a+b)^1$ → 1 1
$(a+b)^2$ → 1 2 1
$(a+b)^3$ → 1 3 3 1
$(a+b)^4$ → 1 4 6 4 1
$(a+b)^5$ → 1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6$ → 1 6 15 20 15 6 1
....

Con la excepción de los coeficientes unitarios extremos, los otros coeficientes resultan de la suma de los dos números que están sobre él. Por ejemplo, para los coeficientes encerrados en círculo tenemos,

- El coeficiente 6, es la suma de 3 + 3;
- El coeficiente 15 es la suma de 5 + 10

Así, todos los coeficientes de los binomios se generan, sumando los coeficientes que están por encima de él, a la derecha y a la izquierda

Ej. 23. Desarrolle $(x+y)^5$

Solución:

Al aplicar el binomio de Newton el producto es igual a:

$$(x+y)^5 = (x)^5 + 5\cdot(x)^4(y) + 10\cdot(x)^3(y)^2 + 10\cdot(x)^2(y)^3 + 5\cdot(x)(y)^4 + (y)^5$$

Observe:

- Si el binomio tiene potencia n=5, el resultado tendrá n+1=5+1=6 términos
- Los dos términos extremos están elevados a la potencia del binomio.
- Los términos centrales tienen como coeficientes los elementos de la fila n+1= 5+1=6 del Triángulo de Pascal.
- Término a término, el 1er. elemento del binomio va descendiendo de grado: 5,4,3,2,1 y 0.
- Término a término, el 2do. elemento del binomio va ascendiendo de grado: 0,1,2,3,4,5.

En general, para un binomio $(a+b)^n$ tenemos:

$$(a+b)^n = a^n + c_{n1}\cdot a^{n-1}\cdot b + c_{n2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \ldots + c_{nn}\cdot a\cdot b^{n-1} + b^n$$

donde:

- $c_{n1}, c_{n2}, c_{n3}, c_{n4}, \ldots c_{nn}$ son los coeficientes que están en la $(n+1)$-fila del Triángulo de Pascal
- Si el binomio tiene potencia *n*, el resultado tendrá $(n+1)$ términos
- Los dos términos extremos están elevados a la potencia del binomio, *n*.

- Término a término, el 1er. elemento del binomio va descendiendo de grado: *n,(n-1)*, ... 2,1 y 0.
- Término a término, el 2do. elemento del binomio va ascendiendo de grado: 0,1,2, ... *(n-1),n*

Ej. 24. Desarrolle $(2x+3y)^4$

Solución:

$$(2x+3y)^4 = (2x)^4 + 4\cdot(2x)^3\cdot(3y) + 6\cdot(2x)^2\cdot(3y)^2 + 4\cdot(2x)\cdot(3y)^3 + (3y)^4$$

Hemos utilizado el Triángulo de Pascal, donde el 1er. término del binomio es *2x* y el 2do. término es *3y*. Los coeficientes del binomio son: 1, 4, 6, 4 y 1. (5ta. fila del Triángulo de Pascal) y los términos cumplen con la siguiente condición:

- Las potencias del 1er. elemento, *2x*, van decreciendo: 4, 3, 2, 1, 0.
- Los potencias del 2do. elemento, *3y*, van creciendo: 0, 1, 2, 3, 4.

Continuemos desarrollando el ejemplo:

$$\begin{aligned}(2x+3y)^4 &= 16x^4 + 4\cdot(8x^3)\cdot(3y) + 6\cdot(4x^2)\cdot(9y^2) + 4\cdot(2x)\cdot(27y^3) + 81y^4 \\ &= 16x^4 + 96x^3y + 216x^2y^2 + 216xy^3 + 81y^4\end{aligned}$$

Ej. 25. Desarrolle $(x^2-2y)^5$

Solución:

$$\begin{aligned}(x^2-2y)^5 &= (x^2)^5 + 5(x^2)^4(-2y) + 10(x^2)^3(-2y)^2 + 10(x^2)^2(-2y)^3 + 5(x^2)(-2y)^4 + (-2y)^5 \\ &= x^{10} - 10x^8y + 40x^6y^2 - 80x^4y^3 + 80x^2y^4 - 32y^5\end{aligned}$$

Observe como los signos se van alternando cuando el 2do. elemento del binomio está restando, empezando por el signo + y luego -, +, -, +,-,....

Ej. 26. Desarrolle $\left(2x^2 - \frac{1}{2}y\right)^3$

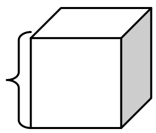
Solución:

Vamos a utilizar el Binomio de Newton para resolver este producto:

$$\left(2x^2-\frac{1}{2}y\right)^3=\left(2x^2\right)^3+3\left(2x^2\right)^2\left(-\frac{1}{2}y\right)+3\left(2x^2\right)\left(-\frac{1}{2}y\right)^2+\left(-\frac{1}{2}y\right)^3$$
$$=8x^6-3\left(4x^4\right)\left(\frac{1}{2}y\right)+3\left(2x^2\right)\left(\frac{1}{4}y^2\right)-\frac{1}{8}y^3$$
$$=8x^6-6x^4y+\frac{3}{2}x^2y^2-\frac{1}{8}y^3$$

Ejercicios de aplicación:

Ej. 27. Utilice productos Notables para calcular el volumen del siguiente cubo

2x -1


Solución:

Primero recordemos que el cubo tiene todas sus dimensiones de igual medida, es decir:

largo = ancho = altura = *2x – 1*

Luego observemos que la fórmula para el volumen de un sólido y sustituimos:

$$V = largo \times ancho \times alto$$
$$=(2x-1)\cdot(2x-1)\cdot(2x-1)$$
$$=(2x-1)^3$$

Aplicando las propiedades de multiplicación de potencias de igual base

Por último desarrollamos el producto notable:

$$(2x-1)^3=(2x)^3-3(2x)^2.(1)+3(2x)\cdot(1)^2-1^2$$
$$=8x^3-3\cdot(4x^2)+6x-1$$
$$=8x^3-12x^2+6x-1$$

Ej. 28. Una pieza cuadrada de cartón es utilizada para construir una caja sin tapa, cortando de cada esquina un cuadrado de 5cm de lado; luego se doblan los bordes para formar los lados de la caja. ¿Hallar la fórmula que permita conocer las dimensiones de la pieza de carton para que el volumen de la caja sea de 12.500 cm^3?

Solución:

Primero representamos gráficamente la pieza de cartón:

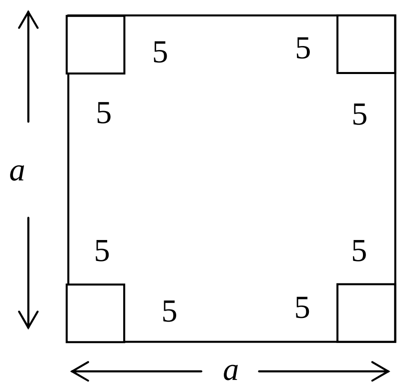


Fig. 1

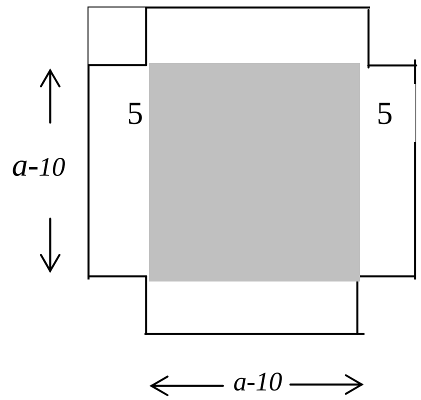


Fig. 2

Llamamos a al lado de la pieza cuadrada de cartón. En la Fig. 2, cortamos las esquinas y la parte sombreada representa el fondo de la caja y las pestañas de la pieza cortada de 5cm. representa la altura de la caja.

El volumen V de la caja será:

$$V = l\arg o \times ancho \times alto$$

$$V = (a-10)\cdot(a-10)\cdot 5$$

$$V = (a-10)^2 \cdot 5$$

Sabemos, por el enunciado del problema, que el volumen de la caja es igual a 12.500 cm^3, es decir

$$V = 12.500 \quad \Rightarrow \quad 12.500 = (a-10)^2 \cdot 5$$

$$(a-10)^2 \cdot 5 = 12.500$$

$$\left(a-10\right)^2 = 2.500$$

Respuesta: la fórmula deseada es $\left(a-10\right)^2 = 2500$, observe que es un producto notable.

<u>*Ejercicios Propuestos:*</u>

I. Desarrolle los siguientes binomios al cuadrado:

a) $\left(x^2-5\right)^2$

b) $\left(2x-3y\right)^2$

c) $\left(4x + x^3\right)^2$

d) $\left(\frac{1}{4}x^2 + 8\right)^2$

e) $\left(-x^2 + 2xy\right)^2$

f) $\left(-\frac{3}{5}x^2 + 8\right)^2$

g) $\left(4yx - x^2y^2\right)^2$

h) $\left(3x - \frac{5}{2}y\right)^2$

i) $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2$

j) $\left(\frac{3}{2}\sqrt{xy} + 2\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2$

II. Desarrolle los siguientes binomios al cubo:

a) $\left(x^2 - 5\right)^3$

b) $\left(2x - 3y\right)^3$

c) $\left(xy - 3x^2\right)^3$

d) $\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y\right)^3$

e) $\left(5ab^2 + 3a^2b\right)^3$

f) $\left(ab - 4b^2\right)^3$

III. Desarrolle los siguientes productos de binomios utilizando Productos Notables:

a) $\left(2x - \frac{5}{8}\right)\left(2x + \frac{5}{8}\right)$

b) $\left(3x^2 - 2\right)\left(3x^2 + 2\right)$

c) $\left(4x - 8\right)\left(3x - 6\right)$

d) $\left(2y^3 + 8xy\right)\left(2y^3 + 5xy\right)$

e) $\left(-\frac{3}{4}x^2 + 2y^2\right)\left(\frac{3}{4}x^2 + 2y^2\right)$

f) $\left(\frac{3}{4}a^2b + \frac{1}{2}b^3\right)\left(\frac{3}{4}a^2b - \frac{3}{5}b^3\right)$

g) $\left(xy^3 + 4x^2\right)\left(xy^3 + 8x^2\right)$

h) $\left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y\right)\left(\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}y\right)$

IV. Desarrolle utilizando el Binomio de Newton y el Triángulo de Pascal:

a) $(3x^2 - 5)^4$ b) $(2yx - 3y)^5$

c) $(2x^2y - 4y^2)^6$ d) $\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y\right)^5$

e) $(5ab + 3ab)^6$ f) $\left(\frac{2}{3}ab - \frac{3}{2}b^2\right)^4$

V. Desarrolle los siguientes productos utilizando productos notables

a) $(x^{3y} + 4y^{5y})^2$ b) $\left(\frac{a^2b^3}{2} - \frac{a^3b^2}{2}\right)^2$

c) $(x^{a+1} - x^{1-2a})^2$ d) $\left(\frac{4}{9}x^2y - \frac{1}{8}xy^2\right)^3$

e) $\left(\frac{11}{33}x^2y^2 + \frac{14}{56}y\right)\cdot\left(\frac{11}{33}x^2y^2 - \frac{14}{56}y\right)$ f) $(x^{2n} - x^n + 1)\cdot(x^{2n} - x^n - 2)$

g) $\left(x^n + y^n - \frac{3}{4}\right)\cdot\left(x^n + y^n + \frac{3}{4}\right)$

VI. Responde a cada una de los siguientes planteamientos

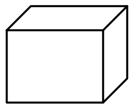
a) ¿Qué diferencia observas entre $(x-a)^2$ *y* $x^2 - a^2$?

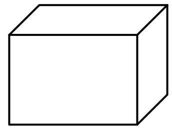
b) ¿Es $(-x-a)^2 = (x+a)^2$? Justifica tu respuesta.

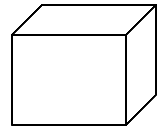
c) ¿Es $(x-a)^3 = (a-x)^3$? Justifica tu respuesta.

d) Si $a + b = 7$ y $a - b = 3$, ¿Cuánto vale $a^2 - b^2$?

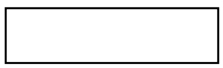
VII. Utilice Productos Notables para determinar la fórmula que permita calcular el volumen de cada uno de los siguientes cubos:

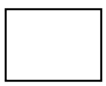
a) 

b) 

c) 

Utilice Productos Notables para determinar la fórmula que permita calcular el área de cada uno de las siguientes figuras:

d) 

e) 

Resuelva los siguientes problemas:

f) Si un cuadrado de área es igual a x^2 se le suma a un lado 10 cm y al otro 4 cm, ¿Cuál es la fórmula que permite calcular el área de la nueva figura?

g) Encuentre una fórmula que permita calcular el área de la base de un paralelepípedo de base rectangular, sabiendo que las dimensiones son: x cm de altura, y en la base el largo es 3 unidades menos que la altura y el ancho es 3 unidades más que la altura.

h) Un envase tiene forma de cubo y contiene un volumen igual a 125 cm^3 . Con la finalidad de disminuir costos, la empresa reducir el tamaño del envase restando "n" unidades (con $n<5$) a la arista del cubo original. ¿Qué fórmula permite conocer el volumen del nuevo envase?

i) Un tanque en forma de paralelepípedo se encuentra lleno de agua. Las dimensiones del tanque que son:

largo= x +2; ancho= x + 3 y altura= x + 6 si al abrir la llave el nivel de agua se reducen en 4 cm, ¿cuál es el volumen de agua que queda dentro del tanque?

Respuestas de los ejercicios propuestos:

Parte I

a) $x^4 - 10x^2 + 25$

b) $4x^2 - 12xy + 9y^2$

c) $16x^2 + 8x^4 + x^6$

d) $\frac{1}{16}x^4 + 4x^2 + 64$

e) $x^4 - 4x^3y + 4x^2y^2$

f) $\frac{9}{25}x^4 - \frac{48}{5}x^2 + 64$

g) $16x^2y^2 - 8x^3y^3 + 4x^4y^4$

h) $9x^2 - 15xy + \frac{25}{4}y^2$

i) $x - 2\sqrt{xy} + y$

j) $\frac{9}{4}xy + 6y + 4\frac{y}{x}$

Parte II

a) $x^6 - 15x^4 + 75x^2 - 125$

b) $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

c) $x^3y^3 - 9x^4y^4 + 27x^5y - 27x^6$

d) $\frac{8}{27}x^3 + x^2y + \frac{9}{8}xy^2 + \frac{27}{64}y^3$

e) $125a^3b^66 + 225a^4b^5 + 135a^5b^4 + 27a^6b^3$

f) $a^3b^3 - 12a^2b^4 + 48ab^5 - 64b^6$

Parte III

a) $4x^2 - \frac{25}{64}$

b) $9x^4 - 4$

c) $12x^2 + 48x + 48$

d) $4y^6 + 26xy^4 + 40x^2y^2$

e) $4y^4 - \frac{9}{16}x^4$

f) $\frac{9}{16}a^4b^2 - \frac{3}{40}a^2b^4 - \frac{3}{10}b^6$

g) $x^2y^6 + 2x^3y^3 + 32x^4$

h) $\frac{1}{25}x^2 + \frac{2}{25}xy - \frac{8}{25}y^2$

Parte IV

a) $81x^8 - 540x^6 + 1350x^4 - 1500x^2 + 625$

b) $32y^5x^5 - 240y^5x^4 + 720y^5x^3 - 1.080y^5x^2 + 810y^5x - 243y^5$

c) $64x^{12}y^6 - 768x^{10}y^7 + 3.840x^8y^8 - 10.240x^6y^9 + 15.360x^4y^{10} - 12.288x^2y^{11} + 4.096y^{12}$

d) $\frac{32}{243}x^5 + \frac{20}{27}x^4y + \frac{5}{3}x^3y^2 + \frac{15}{8}x^2y^3 + \frac{135}{128}xy^4 + \frac{243}{1.024}y^5$

e) $(8ab)^6 = 262.144a^6b^6$

f) $\frac{16}{81}a^4b^4 - \frac{16}{9}a^3b^5 + 6a^2b^6 - 9ab^7 + \frac{81}{16}b^8$

Parte V

a) $x^{64} + 8x^{84} + 16x^{10y}$

b) $\frac{a^4b^6}{4} - \frac{a^5b^5}{2} + \frac{a^6b^4}{4}$

c) $x^{2a+2} + 2x^{2-a} + x^{2-4a}$

d) $\frac{64}{729}x^6y^3 - \frac{48}{648}x^5y^4 + \frac{12}{576}x^4$

e) $\frac{121}{1089}x^4y^4 - \frac{196}{3136}y^2$

f) $x^{4n} - 2x^{2n} + x^n - 2$

g) $x^{2n} + 2x^ny^n + y^{2n} - \frac{9}{4}$

Parte VII

a) Resp: $V(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

b) Resp: $V(x) = 27x^3 - 135x^2 + 225x - 125$

c) Resp: $V(x) = 125x^3 + 300x^2 + 240x + 64$

d) Resp: $A(x) = x^2 - 1$

e) Resp: $A(x) = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$

f) Resp: $A(x) = x^2 + 14x + 40$

g) Resp: $V(x) = x^2 - 9$

h) Resp: $V(n) = 125 - 75n + 15n^2 - n^3$

i) Resp: $x^3 + 5x^2 - 10x + 12$