República Bolivariana de Venezuela

Ministerio de la Defensa

Universidad Nacional Experimental Politécnica de la Fuerza Armada

Núcleo Caracas

Curso de Inducción Universitaria CIU

Cátedra: ***Razonamiento Matemático***

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES *Q*

GUIA CIU NRO: 3

COMISIÓN DE APOYO A RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Integrado por:

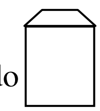
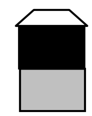
INTEGRANTES:

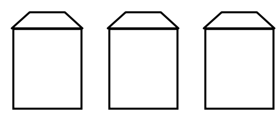
Ing. Beliana Gómez
Ing. Elvia Moreno
Ing. Mixef Rojas
Lic. Teresa Gómez
Prof. Neida González

1. ***Definición de Fracciones***

Gran parte del estudiantado resuelve ecuaciones, matrices, factorizaciones, etc. con números enteros; sin embargo cuando estos procesos incluyen fracciones pareciera ocurrir una especie de colapso, se pierde el ritmo y no sabemos como resolver el ejercicio. En el mundo real, las fracciones y decimales representan la mayoría de los números utilizados y es importante dominarlos con seguridad.

Históricamente las fracciones surgieron de la necesidad de representar las PARTES de un TODO. Algunos ejemplos son:

- Un litro de leche es el todo  y lo puedo dividir en dos partes iguales,  es decir cada medio litro de leche es un parte del todo.

- Tres litros de leche puede ser el todo  y en este caso cada litro de leche es una parte del todo

Matemáticamente las fracciones se expresen como $\frac{a}{b}$, donde

$b =$ denominador, nos indica las partes iguales en que se divide el todo (mitad, tercio, etc.), este debe ser un número entero y diferente de cero

a = numerador, nos indica cuántas partes tomamos del todo que se ha dividido. Este debe ser un número entero.

Debe quedar muy claro que una fracción es un número y no dos aún cuando utilizamos dos números enteros para escribirla.

Esencialmente la fracción $\frac{a}{b}$ representa una división, en la cual:

a =numerador o dividendo, el cual debe ser un número entero

$b =$ denominador o divisor, el cual debe ser un número entero diferente de cero.

y se indica "a ***dividido entre*** b***".***

Ej. 1. Represente como división las siguientes fracciones $\frac{4}{2}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{7}{7}$; $\frac{8}{3}$

a. $\frac{4}{2} = 2$, al dividir quedó un número entero exacto

b. $\frac{2}{5} = 0{,}4$ al dividir quedó un número decimal exacto menor que la unidad

c. $\frac{7}{7} = 1$ al dividir quedó el número entero exacto (en este caso la unidad, 1)

d. $\frac{8}{3} = 2{,}666666667$ al dividir quedó un número decimal mayor que la unidad

La división entre cero (0) no está definida, es decir para b = 0 no existe el cociente a/b.

Todo entero, positivo o negativo, puede representarse como una fracción donde el denominador es 1. Generalmente, éste no se escribe pues queda matemáticamente entendido.

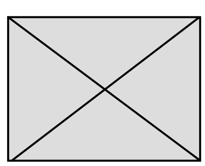
2. *Tipos de Fracciones*

Entre los tipos de fracciones podemos encontrar:

- Fracción Unidad
- Fracción Decimal
- Fracción Propia
- Fracción Impropia

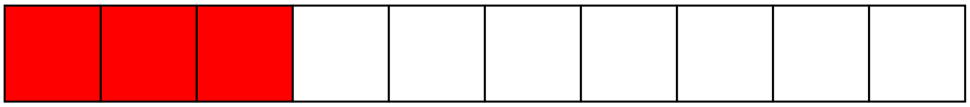
2.1) *Fracción Unidad*

Cuando el numerador es igual al denominador la fracción se llama fracción unidad, por ejemplo:

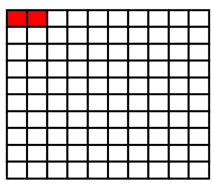
$\frac{4}{4}$ Gráficamente  Aquí observamos que representa una (1) unidad

2.2) ***Definición de Fracciones Decimales***

Se denomina fracción decimal a las que tienen como denominador común la unidad seguida de ceros. Así por ejemplo $\frac{3}{10}$ *y* $\frac{73}{100}$ son fracciones decimales. Una de las formas de representar gráficamente una fracción es, por ejemplo para $\frac{3}{10}$



Observe que la unidad esta divida en diez (10) partes iguales, y a cada una de esas partes le llamamos décimas, por lo tanto la fracción representada se **lee tres décimas,** es decir $\frac{3}{10} = 0{,}3$. De este modo, podemos decir que **toda fracción decimal equivale a un número decimal** con un número limitado de cifras. Y así por ejemplo, la fracción $\frac{2}{100}$ se lee **dos centésimas**, gráficamente lo vemos así,



Observe que en este caso la unidad se ha dividido en cien partes iguales y cada parte recibe el nombre de centésima y concluimos que $\frac{2}{100} = 0{,}02$.

Para la lectura de fracciones decimales podemos recordar que estas se nombran de acuerdo al número de partes en que se ha dividido la unidad como hemos visto en los ejemplos anteriores, así si la unidad esta dividida en mil partes entonces cada parte recibirá el nombre de milésima, para facilitar la lectura podemos recordar el cartel de valores

centena	decena	unidad	,	décima	centésima	milésima

Por otro lado, se puede señalar que algunas veces para facilitar ciertas operaciones con fracciones decimales podemos escribir la fracción decimal en forma de *notación de científica.* En los ejemplos anteriores sería de la siguiente forma:

$\frac{3}{10}$ *Convertimos en número decimal* ***0,3*** *Convertimos en notación científica* ***3 x 10⁻¹***

aquí podemos observar como $\frac{3}{10} = 3x10^{-1}$.

Recuerde:

Para expresar las fracciones decimales en forma de notación científica se procede a multiplicar el numerador por diez elevado a la menos el número que indica la cantidad de ceros que sigue a la unidad en el denominador

Una **fracción común u ordinaria se puede convertir en una fracción decimal** dividiendo el numerador entre el denominador, aproximando la división hasta que dé un cociente exacto o se repita en el cociente de manera indefinida una cifra o grupo de cifra.

<u>Ej. 2.</u> Convertir $\frac{1}{3}$ en fracción decimal

Efectuamos la división del numerador entre el denominador

$$\begin{array}{l|l} 10 & 3 \\ \hline \;\;10 & 0{,}333\ldots \\ \;\;\;\;10 & \\ \;\;\;\;\;\;1 & \\ \;\;\;\;\;\;\vdots & \end{array}$$

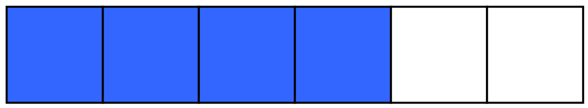
(Observe que se repite en el cociente la cifra 3)

Entonces $\frac{1}{3} = 0{,}333...$ y este número decimal lo podemos escribir como una fracción

decimal haciendo uso de la notación científica $0{,}333 = 333x10^{-3} = \frac{333}{1000}$

2.3) ***Fracción Propia*:**

El numerador es menor que el denominador ($a < b$). Para representar gráficamente fracciones propias sólo se necesita una unidad. Su cociente siempre resulta menor que uno. Un ejemplo de fracción propia es $\frac{4}{6}$ observe que el numerador es menor que el denominador, para su representación gráfica es suficiente una unidad:

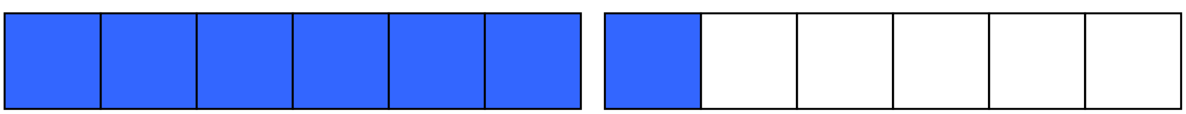


y su cociente es aproximadamente 0,66 el cual es un número menor que uno (1).

2.4) ***Fracción Impropia***

El numerador es mayor que el denominador ($a > b$). Su cociente siempre resulta mayor que 1. Para representar gráficamente fracciones impropias se necesitan más de una unidad, recuerde que la unidad se divide en tantas parte como indique el denominador y en este tipo de fracción la unidad no es suficiente para tomar tantas partes como indica el numerador, por ello se utilizan mas de una unidad para representar gráficamente una fracción impropia. Su cociente siempre resulta mayor que uno.

Un ejemplo de fracción impropia es $\frac{7}{6}$, observe que el numerador es mayor que el denominador y para su representación gráfica necesitamos dos unidades divididas en el mismo número de partes iguales:



y su cociente es 1,166666667, este número es mayor que uno.

3. Comparación de Fracciones

Comparamos fracciones cuando las ordenamos de menor a mayor o viceversa, esto nos permite establecer entre ellas una relación de orden. Para esta tarea seguimos dos reglas fundamentales:

a. Si las fracciones que comparamos **son de igual denominador** es menor la fracción que tenga menor numerador y mayor aquella que tenga mayor numerador. Por ejemplo, si queremos ordenar las fracciones de menor a mayor $\frac{5}{8}$; $\frac{7}{8}$ *y* $\frac{2}{8}$ la relación de orden queda $\frac{2}{8} < \frac{5}{8} < \frac{7}{8}$, observe que el todo para cada fracción esta dividida en ocho (8) partes iguales y que la fracción que toma menor número de partes del todo es $\frac{2}{8}$ por ello la fracción menor y así en consecuencia

b. Si las fracciones que comparamos **son de igual numerador,** es menor la fracción que tenga mayor denominador y mayor aquella que tenga menor denominador. Por ejemplo, si queremos ordenar las fracciones de menor a mayor $\frac{5}{3}$; $\frac{5}{8}$ *y* $\frac{5}{2}$ la relación de orden queda $\frac{5}{8} < \frac{5}{3} < \frac{5}{2}$, observe que el todo para cada fracción esta dividido de diferentes partes iguales, esto quiere decir que mientras en menos partes se divide el todo mayor será cada parte respecto a las partes de una fracción que tiene mayor cantidad de divisiones y que la fracción que toma menor número de partes del todo es $\frac{2}{8}$ por ello la fracción menor y así en consecuencia seguimos con las otras fracciones.

<u>Ej. 3.</u> Ordene de mayor a menor las siguientes fracciones: $\frac{2}{3}$; $\frac{9}{3}$; $\frac{7}{3}$; $\frac{1}{3}$; 2

Como los denominadores son iguales entonces ordenamos colocando primero la que tiene mayor numerador hasta llegar a la que tiene menor numerador $\frac{9}{3} > \frac{7}{3} > 2 > \frac{2}{3} > \frac{1}{3}$

<u>Ej. 4.</u> Ordene de mayor a menor y de menor a mayor las siguientes fracciones $\frac{5}{6}$; $\frac{5}{1}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{5}{3}$

De Mayor a Menor: Como los numeradores son iguales ordenamos según el denominador, colocamos primero la fracción con menor denominador $\frac{5}{1} > \frac{5}{2} > \frac{5}{3} > \frac{5}{6}$

¿Qué pasa si leemos la desigualdad anterior de derecha a izquierda?

De Menor a Mayor: Como los numeradores son iguales ordenamos según el denominador, colocamos primero la fracción con mayor denominador $\frac{5}{6} < \frac{5}{3} < \frac{5}{2} < \frac{5}{1}$

4. ***Número Mixto***

El número mixto consta de entero y fracciones, es decir contiene un número exacto de unidades (parte entera), y además de una o varias partes iguales de la unidad (parte decimal), ejemplo:

$$1\frac{2}{3} \longrightarrow \text{Parte decimal}$$

Número exacto de unidades o parte entera

El número mixto representa la suma de la parte entera con la parte decimal, por lo tanto se puede convertir un número mixto a una fracción, hagamos esto con el ejemplo anterior:

$$1\frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3}$$

por lo tanto $1\frac{2}{3}$ es equivalente a $\frac{5}{3}$. De igual forma la fracción $\frac{5}{3}$ puede convertirse de nuevo en un número mixto dividiendo 5 entre 3, donde el cociente es 1 y el residuo es 2 y el divisor 3, como se ve:

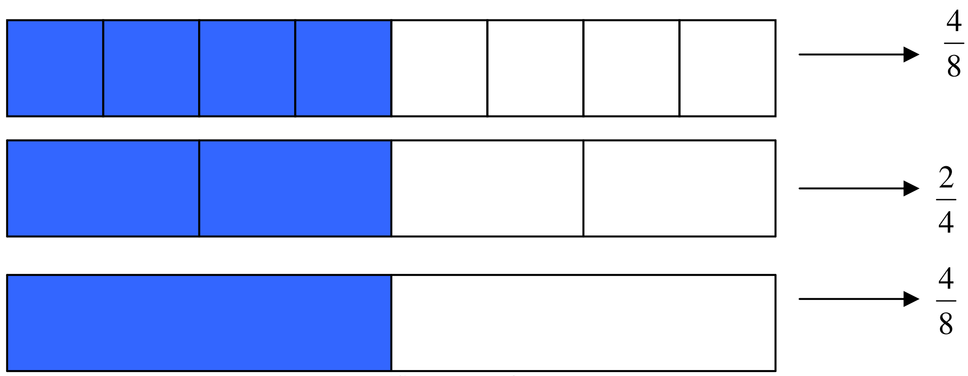
$$\begin{array}{l|l} 5 & 3 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

$$\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \text{residuo} \\ \longrightarrow \text{divisor} \end{array}$$

Cociente

5. ***Fracciones Equivalentes***

Dos o mas fracciones son equivalentes cuando representan una misma superficie, por ejemplo $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{4}$ y $\frac{4}{8}$ representan las misma superficie, por lo tanto son equivalentes, veamos esto gráficamente:



Dadas dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se puede determinar que estas son equivalentes siempre a .d = b . c, es decir que el resultado de multiplicar el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción es igual al producto de multiplicar el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción.

<u>Ej. 5.</u> Pruebe que $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{4}$ y $\frac{4}{8}$ son equivalentes.

a. Probemos con , $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ si multiplicamos de acuerdo a la regla enunciada arriba

$1 \,.4 = 2 \,.\, 2 \Rightarrow 4 = 4$, como la igualdad se cumple entonces confirmamos que

$\frac{1}{2}$ *es equivalente a* $\frac{2}{4}$

b. Probemos con , $\frac{2}{4}$ y $\frac{4}{8}$ si multiplicamos de acuerdo a la regla enunciada arriba

$2 \,.\, 8 = 4 \,.\, 4 \Rightarrow 16 = 16$, como la igualdad se cumple entonces confirmamos que

$\frac{2}{4}$ *es equivalente a* $\frac{4}{8}$

c. Probemos con , $\frac{1}{2}$ y $\frac{4}{8}$ si multiplicamos de acuerdo a la regla enunciada arriba

$1 \,.8 = 2 \,.\, 4 \Rightarrow 8 = 8$, como la igualdad se cumple entonces confirmamos que

$\frac{1}{2}$ *es equivalente a* $\frac{4}{8}$

Hemos confirmado que las fracciones son equivalentes entre si.

Una fracción equivalente puede obtenerse simplificando (reduciendo) o amplificando (ampliando) una fracción dada.

a. __Fracciones Equivalentes y Amplificación de fracciones__

Para ampliar una fracción, multiplicamos tanto el numerador como el denominador por un mismo número entero.

Digamos, que nos piden fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$:

1. Multiplicando por 2, tanto el numerador como el denominador, tenemos:

$$\frac{1\times(2)}{2\times(2)}=\frac{2}{4}$$

2. Multiplicando por 3, tanto el numerador como el denominador, tenemos:

$$\frac{1\times(3)}{2\times(3)}=\frac{3}{6}$$

3. Multiplicando por 5, tanto el numerador como el denominador, tenemos:

$$\frac{1\times(5)}{2\times(5)}=\frac{5}{10}$$

Las tres fracciones encontradas son equivalentes a la fracción original $\frac{1}{2}$.

b. __Fracciones Equivalentes y Simplificación de fracciones__

Por otro lado, para reducir una fracción dividimos tanto el numerador como al denominador entre un mismo número entero. Digamos, que nos piden reducir la fracción $\frac{20}{40}$, entonces

1. Dividiendo entre 2, tanto el numerador como el denominador, nos queda:

$$\frac{20 \div 2}{40 \div 2} = \frac{10}{20}$$

2. Dividiendo entre 5: $\frac{20 \div 5}{40 \div 5} = \frac{4}{8}$

3. Dividiendo entre 10: $\frac{20 \div 10}{40 \div 10} = \frac{2}{4}$

Las tres fracciones encontradas son equivalentes a la fracción original $\frac{20}{40}$; aunque existen otras más que pudieran obtenerse.

6. Simplificación de Fracciones

Un paso adicional en la reducción de fracciones, consiste en simplificar una fracción, reducir la fracción de tal forma que el numerador y el denominador no tengan más divisores comunes, exceptuando el uno (1).

Observe en el ejemplo anterior, la fracción $\frac{20}{40}$ se ha reducido a $\frac{2}{4}$; sin embargo, ésta última fracción se puede reducir aún más, al dividir entre 2, tanto el numerador como el denominador y así obtener $\frac{2 \div 2}{4 \div 2} = \frac{1}{2}$. La fracción $\frac{1}{2}$ representa la simplificación de la fracción original $\frac{20}{40}$.

Vamos a enumerar las situaciones más comunes en la simplificación de fracciones:

a) Una fracción se puede simplificar por 2, si tanto el numerador como el denominador son pares diferentes de cero.

b) Una fracción se puede simplificar por 5, si tanto el numerador como el denominador terminan en cero (0) o en cinco (5).

c) Una fracción se puede simplificar por 3, si tanto el numerador como el denominador son múltiplos de tres. En este caso es oportuno acotar que un número múltiplo de tres (3) no necesariamente termina en 3, 6 o 9.

Veamos ahora algunos ejemplos de simplificación de fracciones.

Ej. 6. Simplificar $\frac{45}{20}$

Para simplificar esta fracción, notamos que el numerador termina en 5 y el denominador termina en cero (0), por lo que ambos como son múltiplos de 5, se dividen entre 5, obteniendo:

$$\frac{45 \div 5}{20 \div 5} = \frac{9}{4}$$

Para ver si podemos seguir simplificando la fracción, calculamos el Máximo Común Divisor entre el numerador y denominador, es decir, MCD (9,4) = 1. Como MCD es la unidad significa que la fracción no puede seguir simplificando.

Ej. 7. Simplificar $\frac{2.745}{81}$

El numerador 2.745 es múltiplo de 3, (¿Por qué?) y el denominador también, por lo tanto para simplificar la fracción, dividimos entre 3 el numerador y el denominador:

$$\frac{2.745 \div 3}{81 \div 3} = \frac{915}{27}$$

Observamos el resultado y notamos que tanto el numerador como el denominador son múltiplos de 3, repetimos el procedimiento con la nueva fracción y obtenemos:

$$\frac{2745 \div 3}{81 \div 3} = \frac{915 \div 3}{27 \div 3} = \frac{305}{9}$$

Al calcular MCD(9,305) éste vale 1, entonces la fracción no se simplifica más, es decir, la fracción $\frac{2745}{81} \approx \frac{305}{9}$ (El símbolo $\approx$ indica que las dos expresiones son equivalentes).

7. ***Reducción de fracciones al mínimo común denominador***

Si se quiere reducir fracciones al mínimo común denominador, primero se deben simplificar las fracciones dadas, a continuación se busca el mínimo común múltiplo de los denominadores y éste será el denominador común. Para hallar los numeradores se divide el m.c.m entre cada denominador y el cociente se multiplica por el numerador respectivo.

<u>Ej. 8.</u> Reducir al mínimo común denominador $\frac{2}{3}; \quad \frac{35}{60}; \quad \frac{5}{180}$

<u>Solución:</u>

- Simplificamos las fracciones y queda: $\frac{2}{3}; \quad \frac{7}{12}; \quad \frac{1}{36}$
- Buscaremos el m.c.m de los denominadores 3, 12 y 36, el cual será 36, por lo tanto las nuevas fracciones tendrán el denominador común 36
- Hallamos el numerador de la primera fracción dividiendo el m.c.m hallado (36) entre 3 y multiplicamos por el numerador:

  $36 \div 3 = 12 \quad \textit{entonces la fracción queda}: \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 12}{36} = \frac{24}{36}$
- Hallamos el numerador de la segunda fracción dividiendo el m.c.m hallado (36) entre 12 y multiplicamos por el numerador:

  $36 \div 12 = 3 \quad \textit{entonces la fracción queda}: \frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 3}{36} = \frac{21}{36}$
- Hallamos el numerador de la tercera fracción dividiendo el m.c.m hallado (36) entre 36 y multiplicamos por el numerador:
- $36 \div 36 = 1 \quad \textit{entonces la fracción queda}: \frac{1}{36} = \frac{1 \cdot 1}{36} = \frac{1}{36}$

Las fracciones reducidas al mínimo común denominador son $\frac{24}{36}; \quad \frac{21}{36}; \quad \frac{1}{36}$

8. <u>*Operaciones con Fracciones:*</u>

Hemos explicado la reducción de fracciones al mínimo común denominador, pues la adición y sustracción con fracciones requiere de su comprensión.

<u>*8.1.- Adición y sustracción con Fracciones*</u>

Estas operaciones requieren un especial cuidado de parte de los estudiantes, pues se presentan confusiones de tal magnitud, que impiden solucionar problemas de materias avanzadas, por no dominar estos conceptos básicos.

Para sumar y/o restar fracciones, es necesario utilizar el *mcm* de los denominadores y convertir cada fracción en una equivalente, cuyo denominador sea el *mcm*.

Veamos a continuación los casos que se nos presentan a la hora de realizar suma o resta con fracciones:

Caso I: *Cuando las fracciones tienen igual denominador se procede a sumar los numeradores y colocar el mismo denominador. Luego simplificamos.*

Ej. 9. Realice la siguiente suma $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}$

Solución: $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

Caso II: *Cuando las fracciones tienen diferentes denominadores se procede a reducir las fracciones al mínimo común denominador.*

Ej. 10. Realice la siguiente suma $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$

Solución:

Para resolver la suma de las dos fracciones debemos:

- Convertir las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{3}$ en fracciones del mismo denominador, para ello hallamos el *mcm*(4, 3) = 12 (el *mcm* de los denominadores)
- Para transformar ¾ procedemos así:

  mcm dividido entre denominador; es decir 12/4 = 3

  Multiplicamos por el numerador; 3 (3) = 9,

  Entonces: ¾ = 9/12
- Para transformar 2/3 procedemos así:

mcm / denominador; es decir 12/3 = 4

Multiplicamos por el numerador; 4 (2) = 8,

Entonces: 2/3 = 8/12

Resuelto en forma directa tenemos:

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{(12/4)\times 3+(12/3)\times 2}{12}=\frac{(3)\times(3)+(4)\times(2)}{12}=\frac{9+8}{12}=\frac{17}{12}$$

ERROR COMÚN: $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{3+2}{4+3}=\frac{5}{7}$	*Usted **nunca** haga esto !!!* *Proceda como en la solución del ejemplo.*

<u>Ej. 11.</u> Resuelva $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{3}{8}$

<u>Solución:</u>

Hallamos el $mcm(2,5,8)=40$ (el *mcm* de los denominadores).

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{3}{8}=\frac{(40/2)\times 1+(40/5)\times 2-(40/8)\times 3}{40}=\frac{20\times 1+8\times 2-5\times 3}{40}$$

$$=\frac{20+16-15}{40}=\frac{36-15}{40}=\frac{21}{40}$$

<u>Ej. 12.</u> Resuelva $\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{3}{7}$

<u>Solución:</u>

Obtenemos el $mcm(4,5,7)=140$

$$\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{(140/4)\times(1)-(140/5)\times(2)+(140/7)\times(3)}{140}$$

$$=\frac{35\times(1)-28\times(2)+20\times(3)}{140}=\frac{35-56+60}{140}=\frac{39}{140}$$

<u>Ej. 13.</u> Resuelva $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}$

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{\left(\cancel{12}/\cancel{4}\right)(3)+\left(\cancel{12}/\cancel{3}\right)(2)-\left(\cancel{12}/\cancel{6}\right)}{12}$$

$$=\frac{9+8-2}{12}=\frac{15}{12}$$

Ahora tenemos que simplificar. $\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$

Ej. 14. Resuelva $\frac{1}{2}+1$

Solución:

Recuerde que todo número entero tiene denominador igual a 1

El $mcm(1, 2) = 2$ entonces

$$\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=\frac{(\cancel{2}/\cancel{2})\times(1)+(\cancel{2}/\cancel{2})\times(1)}{2}=\frac{(1)\times(1)+(2)\times(1)}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$$

ERROR COMÚN: $\frac{1}{2}+1=\frac{1+1}{2}=\frac{2}{2}=1$	*Usted **nunca** haga esto !!!!* *La forma correcta es la **e**xplicada en el ejemplo.*

Nota: *Este tipo de adiciones debe realizarse con bastante rapidez e inclusive mentalmente, pues es muy frecuente en ejercicios prácticos de matemáticas en Derivación e Integración.*

Una forma rápida y práctica de obtener el mismo resultado es:

$$\frac{1}{2}+1=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$$

(Multiplicamos el denominador por el entero y el resultado se lo sumamos al numerador, manteniendo el mismo denominador)

Ej. 15. Resuelva $\frac{3}{5}+2$

Solución: $\frac{3}{5}+2=\frac{3+10}{5}=\frac{13}{5}$

Ej. 16. Resuelva $\frac{3}{8}-3$

$$\frac{3}{8}-3=\frac{3-24}{8}=-\frac{21}{8}$$

Ej. 17. Resuelva $5\frac{2}{3}+6\frac{4}{8}+3\frac{1}{6}$

Como se trata de una suma de números mixtos, procedemos de la siguiente forma:

- Se suman los enteros 5 + 6 + 3 = 14
- Se suman las fracciones $\frac{2}{3}+\frac{4}{8}+\frac{1}{6}$

$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$$ (Simplificamos 4/8)

$$=\frac{4+3+1}{6}$$ (Sumamos usando m.c.m)

$$=\frac{4}{3}$$

$$=1\frac{1}{3}$$ (Escribimos el resultados como un número mixto)

Luego el resultado de los enteros, que es 14, se suma con el resultado de las fracciones que es $1\frac{1}{3}$.

$$14+1\frac{1}{3}=15\frac{1}{3}$$ (Se suman las partes enteras de los números)

8.2..- Multiplicación de fracciones: Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos fracciones cualesquiera, donde a,b,c,d son números enteros y $b,d \neq 0$, entonces definimos el producto de dos fracciones como sigue:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{a\times c}{b\times d}$$

Se obtiene el producto de los numeradores y se divide entre el producto de los denominadores.

Ej. 18. Resolver $\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)$

$$\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{2\times 3}{3\times 4}$$

$$=\frac{6}{12} \qquad \left[\text{Simplificando entre 6}\right]$$

$$=\frac{1}{2}$$

Veamos a continuación otra forma de resolver el Ej. 8.

En una multiplicación donde interviene dos o más fracciones, cualquier factor del numerador puede simplificarse con un factor múltiplo del denominador. Veamos,

$$\left(\frac{2}{\cancel{3}_{1}}\right)\times\left(\frac{\cancel{3}^{1}}{4}\right)=\frac{\cancel{2}^{1}\times 1}{1\times \cancel{4}_{2}}=\frac{1\times 1}{1\times 2}=\frac{1}{2}$$

Aunque aquí se ha descrito paso a paso, puede resolverlo de forma directa, lo hemos hecho así, para indicar el orden.

Es preferible simplificar antes de multiplicar, pues aunque este ejemplo resultó sencillo, hay situaciones donde no es tan obvia la simplificación, además, es mejor y más cómodo trabajar con cantidades pequeñas. Esto es válido también para el siguiente ejemplo:

Ej. 19. Resolver $\left(\frac{2}{15}\right)\times\left(\frac{45}{30}\right)\times\left(\frac{5}{3}\right)$

$$\left(\frac{\cancel{2}^{1}}{15}\right)\times\left(\frac{45}{\cancel{30}_{15}}\right)\times\left(\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{1}{15}\right)\times\left(\frac{45}{\cancel{15}_{3}}\right)\times\left(\frac{\cancel{5}^{1}}{3}\right)=\left(\frac{1}{15}\right)\times\left(\frac{\cancel{45}^{15}}{\cancel{3}_{1}}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{\cancel{15}_{1}}\right)\times\left(\frac{\cancel{15}^{1}}{1}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

Resolviendo sin simplificar, nos quedaría:

$$(\frac{2}{15})\times(\frac{45}{30})\times(\frac{5}{3})=\frac{2\times 45\times 5}{15\times 30\times 3}=\frac{450}{1350}$$

Nota: Cuando se utilizan frases para expresar multiplicación con fracciones, la palabra "de" es esencial, pues indica una multiplicación. De esta forma tenemos:

I. $\frac{3}{4}de\frac{1}{8}\approx(\frac{3}{4})\times(\frac{1}{8})=\frac{3}{32}$

II. $\frac{4}{5}\ de\ \frac{10}{16}\ es\ equivalente\ a\ (\frac{4}{5})\times(\frac{10}{16})=(\frac{40}{80})=\frac{1}{2}$

Recíproco de una fracción.

Para toda fracción $\frac{a}{b}$, donde a y b son números diferentes de cero, las fracciones $\frac{a}{b}\ y\ \frac{b}{a}$ cumplen la siguiente relación:

$$(\frac{a}{b})\times(\frac{b}{a})=\frac{a\times b}{b\times a}=\frac{a\times b}{a\times b}=1,$$

decimos entonces que $\frac{b}{a}$ es el ***recíproco o inverso multiplicativo*** de $\frac{a}{b}$ y viceversa.

Así por ejemplo, el recíproco de $\frac{3}{4}$ es $\frac{4}{3}$; el recíproco de $\frac{2}{5}es\frac{5}{2}$; el recíproco de $\frac{1}{2}$ *es 2,* el recíproco de $\frac{-2}{3}es\frac{-3}{2}$.

Ej. 20. Resolver $5\frac{2}{3}\cdot 2\frac{4}{5}\cdot 4\frac{1}{9}$

Solución:

$5\frac{2}{3}\cdot 2\frac{4}{5}\cdot 4\frac{1}{9}$ — Escribir el número mixto como fracción

$=\frac{17}{3}\cdot\frac{14}{5}\cdot\frac{37}{9}=\frac{8806}{135}$ — Multiplicar las fracciones

$=65\frac{31}{135}$ — Escribir la fracción como número mixto

8.3.- División de Fracciones

Para dividir entre una fracción, se convierte en multiplicación utilizando el recíproco del denominador. En palabras sencillas: "Dividir entre una fracción equivale a multiplicar por su recíproco".

Ej. 21. Resuelva $(\frac{2}{3}) \div (\frac{3}{5})$ (también se puede representar como: $\frac{2/3}{3/5}$ *ó* $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{5}}$)

Solución: $(\frac{2}{3}) \div (\frac{3}{5}) = (\frac{2}{3}) \times (\frac{5}{3}) = \frac{10}{9}$

Algunos estudiantes acostumbran a utilizar el método alterno denominado " DOBLE C", el cual nos conduce al mismo resultado.

Ej. 22. Resuelva $(\frac{2}{5}) \div (\frac{7}{5})$

Solución: $(\frac{2}{5}) \div (\frac{7}{5}) = (\frac{2}{\cancel{5}}) \times (\frac{\cancel{5}}{7}) = \frac{2}{7}$

Ej. 23. Resuelva $\frac{3}{1/3}$

Solución: $\frac{3}{1/3} = 3 \times \frac{3}{1} = 9$ $\left(\frac{3}{1} \text{ es el recíproco de } \frac{1}{3} \right)$

ERROR COMUN: $\frac{3}{1/3} = 3 \times \frac{1}{3} = 1$	*No se puede cambiar la operación, primero convierta en multiplicación, utilizando el recíproco del denominador*

.

Ej. 24. Resuelva $\frac{-3/4}{4/5}$

Solución: $\dfrac{-3/4}{4/5} = (-\dfrac{3}{4}) \times (\dfrac{5}{4}) = -\dfrac{15}{16}$

Ej. 25. Resuelve $\dfrac{3/8}{-3/2}$

Solución: $\dfrac{3/8}{-3/2} = (\dfrac{\cancel{3}}{\cancel{8}_{4}}) \times (-\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{3}}) = -\dfrac{1}{4}$

Ej. 26. Resuelve $\dfrac{-3/5}{-7/10} =$

Solución: $\dfrac{-3/5}{-7/10} = (-\dfrac{3}{\cancel{5}}) \times (-\dfrac{\overset{2}{\cancel{10}}}{7}) = \dfrac{6}{7}$

Caso Especial:

Ej. 27. Resuelve $\dfrac{1/2}{3}$.

Solución: $\dfrac{1/2}{3} = (\dfrac{1}{2}) \times (\dfrac{1}{3}) = \dfrac{1}{6}$

Otra forma de ver el ejercicio:

Cuando una fracción se divide por un número entero, diferente de cero, el resultado es el primer numerador dividido por la multiplicación de los denominadores. Así:

$$\frac{1/2}{3} = \frac{1}{(2)\times(3)} = \frac{1}{6}$$

Ej. 28. Resuelve $\dfrac{2/5}{4}$

Solución: $\dfrac{2/5}{4} = \dfrac{\cancel{2}}{(5)\times(\underset{2}{\cancel{4}})} = \dfrac{1}{10}$

Ej. 29. Resuelve $\dfrac{-3/4}{2}$

Solución: $\dfrac{-3/4}{2} = \dfrac{-3}{(4)\times(2)} = -\dfrac{3}{8}$

Ej. 30. Resuelve $\dfrac{2/5}{-2}$

Solución: $\dfrac{2/5}{-2} = \dfrac{\cancel{2}}{(5)\times(\cancel{-2})} = -\dfrac{1}{5}$

Ej. 31. Resuelve $14\dfrac{1}{12} \div 5\dfrac{1}{9}$

Solución: $14\dfrac{1}{12} \div 5\dfrac{1}{9}$

$= \dfrac{169}{12} \div \dfrac{46}{9}$ (Escribir los números mixtos como fracción)

$= \dfrac{169}{12} \cdot \dfrac{9}{46}$ (Resolver la división de fracciones)

$= \dfrac{507}{184}$

$= 2\dfrac{139}{184}$ (Escribir la fracción como un número mixto)

8.4.- Potenciación de una fracción

La potenciación de una fracción al igual que la potenciación de números enteros, es la operación que consiste en multiplicar por si mismo un número llamado base tantas veces como indica otro número denominado exponente. Para resolver la potencia de una fracción se eleva su numerador y denominador a dicha potencia:

Exponente

Base

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\dots$$

Ej. 32. Resuelva $\left(\frac{4}{5}\right)^5$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^5 = \frac{4^5}{5^5} = \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{1024}{3125}$$

Se aplicó la regla y definición enunciadas arriba

Si se trata de elevar un número mixto a una potencia cualquiera se reduce al número mixto a fracciones y se aplica la regla anterior.

Ej. 33. Resuelva $\left(3\,\frac{1}{2}\right)^4$

$$\left(3\,\frac{1}{2}\right)^4 = \left(3+\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{6+1}{2}\right)^4 = \left(\frac{7}{2}\right)^4$$

Se transformó el número mixto en una fracción

$$= \frac{7^4}{2^4} = \frac{7\cdot7\cdot7\cdot7}{2\cdot2\cdot2\cdot2} = \frac{2401}{16}$$

Se aplicó la regla y definición de potenciación de fracciones

$$= 150\,\frac{1}{16}$$

Se transformó la fracción en un número mixto

9.- Ejercicios Propuestos

I. Escribe al lado de cada fracción su nombre (unidad, decimal, propia e impropia)

a. $\frac{132}{15}$ ____________________________________

b. $\frac{85}{100}$ ____________________________________

c. $\frac{12}{20}$ ____________________________________

d. $\frac{96}{96}$ ____________________________________

II. Dadas las siguientes fracciones ordénalas de mayor a menor

a. $\frac{41}{12}$; $\frac{25}{12}$; $\frac{10}{12}$; 4; $\frac{12}{12}$

b. $\frac{7}{8}$; $\frac{7}{16}$; 5; $\frac{7}{2}$; $\frac{7}{7}$

III. Ordena las fracciones dadas en el ejercicio anterior de menor a mayor

IV. Escribe las siguientes fracciones como fracciones decimales

a. $\frac{100}{12}$ b. $\frac{2330}{990}$ c. $\frac{1}{5}$ d. $\frac{1}{6}$

V. Simplifica las siguientes fracciones

a. $\frac{54}{108}$ R: $\frac{1}{2}$

b. $\frac{343}{539}$ R: $\frac{7}{11}$

c. $\frac{98}{105}$ R: $\frac{14}{15}$

VI. Indique: ¿Cuántas fracciones equivalentes encontró para cada fracción e el ejercicio anterior?

VII. Dadas las siguientes fracciones encuentre por lo menos dos fracciones equivalentes para cada una aplicando el proceso de amplificación

a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{3}{7}$ c. $\frac{16}{5}$

VIII. Reducir las siguientes fracciones al mínimo común denominador.

a. $\frac{1}{5};\ \frac{1}{10};\ \frac{3}{20}$ R: $\frac{4}{20};\ \frac{2}{20};\ \frac{3}{20}$

b. $\frac{2}{3};\ \frac{5}{9};\ \frac{7}{18}$ R: $\frac{12}{18};\ \frac{10}{18};\ \frac{7}{18}$

c. $\frac{1}{6};\ \frac{2}{9};\ \frac{3}{8}$ R: $\frac{12}{72};\ \frac{16}{72};\ \frac{27}{72}$

IX. Resolver:

1) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot 32$ R: 60

2) $\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{10}{3}\right)$ R: $\frac{2}{3}$

3) $\left(\frac{5}{3}\right)\div\left(\frac{8}{7}\right)$ R: $\frac{35}{24}$

4) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{7}{4}\right)\right]\div\left(\frac{14}{2}\right)$ R: $\frac{1}{10}$

5) $\left(\frac{5}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)$ R: $\frac{19}{12}$

6) $\left(\frac{8}{7}-\frac{3}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)$ R: $\frac{7}{8}$

7) $\left(\frac{3}{9}-\frac{5}{4}+\frac{3}{6}\right)\div\left(\frac{1}{2}-4+\frac{5}{3}\right)$ R: $\frac{5}{22}$

8) $\left(\frac{4}{3}-\frac{11}{5}+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{8}-1+\frac{3}{8}\right)$ R: 0

9) $\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{11}-\frac{11}{5}\right)\div\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}\right)$ R: $\frac{1.236}{143}$

10) $\left(\frac{2}{7}-4\right)\cdot\left[\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{5}+\frac{2}{10}\right)\div\left(\frac{1}{5}-\frac{4}{7}+1\right)\right]$ R: $\frac{-182}{33}$

11) $3\frac{1}{4}+5\frac{3}{4}$ R: 9

12) $8\frac{3}{7}+6\frac{5}{7}$ R: $15\frac{1}{7}$

13) $7\frac{3}{5}-4\frac{3}{10}$ R: $3\frac{3}{10}$

14) $10\frac{5}{6}-2\frac{7}{9}$ R: $8\frac{1}{18}$

15) $\left(3+2\frac{3}{5}\right)+\left(4\frac{1}{3}+\frac{3}{20}\right)$ R: $10\frac{1}{12}$

16) $180-3\frac{1}{5}-\left(2\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}\right)$ R: $174\frac{37}{90}$

17) $2\frac{5}{6}\cdot 3\frac{3}{4}\cdot 1\frac{1}{17}$ R: $11\frac{1}{4}$

18) $6\frac{2}{7}\cdot 1\frac{3}{11}$ R: 8

19) $8\frac{3}{4}\div 13\frac{1}{3}$ R: $\frac{21}{32}$

20) $5\frac{6}{11}\div 2\frac{13}{22}$ R: $2\frac{8}{57}$

10.- Problemas Propuestos de Suma de Fracciones:

1) Un cliente comproa 5/8 de yarda de tela de corduroy, 7/8 de yarda de sincatex, y 3/8 de lino. ¿Cuánta tela se compró en total?
2) Elena corrió 2 ¾ millas el lunes y 3 ¾ millas el viernes. ¿Cuántas millas corrió en total?
3) El INSIVUMEH reporta 9/10 de pulgadas de lluvia el lunes y 3/10 el miercoles y la misma cantidad el viernes. ¿Cuántas pulgadas de lluvia hubo en la semana?
4) El cimiento de una casa tiene 3 ¾ de pulgada de grosor. El repello de fuera tiene ¾ de pulgada de grosor también y el de dentro mide 3/8 de pulgada. ¿Cuál es el grosor del cimiento en total?
5) La altura de una mesa es de 27 ½ pulgadas desde el piso. Hay un estante que tiene 12 ¾ arriba de la tabla. ¿Cuántas pulgadas tiene el estante desde el piso?
6) Para hacer una pizza, Bruce uso ½ libra de queso, ¼ de peperoni, 1/16 de libras de cebollas y ¼ de libra de tocino. ¿Cuál es el peso de todo junto?
7) El ala de una mariposa reina tiene 2 ¼ de pulgadas. El ala de una mariposa Reina Alejandra es 1 ½ más gruesa. ¿Cuál es el grosor de un ala de una Reina Alejandra?
8) Las alas de la puerta del jardín tienen dos planos de vidrio de 3/16 de pulgada de grosor cada uno. Los planos tienen un vacio de 14/16 de pulgadas. ¿Cuál es el grosor de toda la puerta?
9) Carlos cargó algunos camiones por espacio de 3 2/3 de hora en la mañana y 3 ¾ en la tarde. ¿Cuánto tiempo trabajó en total?

10) Una banda toca tres piezas de musica. La primera pieza dura 1/3 de hora, la segunda 1/6 de hora y la última ¾ de hora. ¿Cuánto tiempo tocaron en total?

Respuestas:

1) 1 7/8	2) 6 ½	3) 1 ½	4) 4 7/8	5) 40 ¼	6) 1 1/16
7) 3 ¾	8) 1 ¼	9) 7 5/12	10) 1 ¼		

11.- Problemas Propuestos de Sustracción de Fracciones:

1) Una receta para una hogaza de pan necesita 1 taza de harina de trigo. Un panadero desea hacer 12 hogazas y solo tiene 5 1/3 de tazas de harina. ¿Cuanto más de harina necesita?
2) Antes de ser cortada, una camisa tenía 34 ¼ pulgadas de largo. Después la misma camisa media 29 ¾ pulgadas. ¿Cuánto le cortaron?
3) Un plomero tiene un tubo que es de 13 ½ pies de largo. El necesita cortar un pedazo de tubo que sea 8 5/8 de largo. ¿Cuánto quedará del tubo?
4) Juanita trabaja 37 ½ horas a la semana. Hasta el Jueves ella había trabajado 34 ¼ de horas. ¿Cuántas horas necesita trabajar el viernes?
5) Un tendero ordena 3 rollos de tela con 25 yardas en cada rollo. Vendió 59 ¾ de tela. ¿Cuánto tiene todavía?
6) Un mueble ha sido barnizado con trementina, sellador y thiner. Si 1/3 de la mezcla es sellador y ¼ es trementina; ¿Qué fracción de la mezcla es thiner?
7) Los Castro caminaron 39 3/8 de millas en tres días. Caminaron 12 ¼ millas en el primer día y 14 5/8 el segundo día. ¿Cuántas caminaron en el tercer día?

8) Diana pesca dos peces que pesan 3 ½ libras uno y 2 ¾ libras el otro. Sus peces pesaban 1 ¾ libras más que los de Cándida. ¿Cuánto pesan los peces de Cándida?

9) Un microbús panel vacío pesa 1 7/8 de tonelada. El peso limite que un puente puede soportar es de 4 ½ toneladas. Si el panel lleva una carga de 1 ¾ de toneladas. ¿Cuántas toneladas bajo el limite de peso tiene?

Respuestas:

1) 6 2/3	2) 4 ½	3) 4 7/8	4) 3 ¼	5)15 ¼	6) 5/12
7)12 ½	8) 4 ½	9) 7/8			

<u>12.- Problemas Propuestos de Multiplicación de Fracciones:</u>

1) Antonio escribió un reporte en ¾ de hora. Francisco hizo 1/3 mas de lo que Antonio hizo. ¿Cuánto tiempo hizo Francisco?
2) La velocidad de escritura de Juan es de 60 palabras por minuto. La velocidad de Isabel es 3/5 de lo que Juan hace. ¿Cuántas palabras por minuto escribe Isabel?
3) Planchas de cemento de 3 ¾ pulgadas de ancho se utilizaron para hacer una cerca. Si se pusieron 24 planchas. ¿Cuánto mide la cerca?
4) Una receta de pastel de café requiere 1 2/3 tazas de harina de trigo. La receta alcanza exactamente para 8 pastelitos de café. ¿Cuántas tazas de harina de trigo se necesitan para hacer 30 pasteles?
5) Carlos practica el piano por 1 ¾ de hora cada día y 2 ¼ de hora los dos días de fin de semana. ¿Cuántas horas practica a la semana?
6) La Sra. Martínez recibió Q1000 de pago. Puso 1/5 en el banco y usó ¼ para pagar deudas. ¿Cuánto dinero le sobró?

Respuestas:

1) ¼ 2)36 3)90 4)6 ¼ 5) 13 ¼ 6) Q550

13.- Problemas Propuestos de División de Fracciones:

1) Un nutricionista de hospital necesita dividir una caja de cereal de 22 ¾ de onza en 7 porciones para igual número de pacientes. ¿Cuánto le corresponde a cada paciente?

2) Una Secretaria usó 3/8 de yarda de lana para hacer un suetercito. ¿Cuántas piezas puede hacer de ¾ de yarda de lana?

3) Un sastre puede terminar un traje en 3 ½ días. Si el trabaja 20 días al mes, ¿Cuántos trajes completos puede hacer en un mes?

4) Un huerto ha sido plantado con surcos de 20 pies. Los Brócolis se han sembrado con 1 1/3 de pies de separación entre cada planta. Si al principio y final de cada surco se dejó dos pies libres, ¿Cuántas plantas caben en un surco?

5) Rosa compró 9 bolsas de galletas que pesaban 1 ¾ libras cada uno. Ella separó las galletas en 6 paquetes iguales. ¿Cuánto pesaba cada paquete?

6) En una semana, 4 miembros de un gimnasio perdieron 2 ¼, 1 3/8, 3 ½ y 2 5/16 libras. ¿Cuál es el promedio de libras perdidas por cada persona?

7) Una mujer usa 2 ½ libras de manzanas por cada lata para envasar. Ella envasó 45 libras de Manzanas del Río y 36 libras de Manzanas de la Montaña. ¿Cuántos cuartos de manzana enlatada obtuvo?

Respuestas:

1) 3 ¼ 2) 2 3) 34 4)13 5) 2 5/8
6) 2 7/16 7) 32 2/5