CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

1.- *DEFINICIÓN DEL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES*

(Conjunto ***N***): Un número natural es cualquier número que se puede usar para contar los elementos de un conjunto finito. Reciben ese nombre porque fueron los primeros que se utilizaron para contar objetos de la naturaleza. De esta manera, se puede representar al conjunto N como:

$$N = \{0,1,2,3,4,\ldots,\ldots\}$$

Este es un conjunto infinito ordenado; es decir, a cada elemento le corresponde un sucesor y a cada uno, con excepción del 0, le corresponde un antecesor.

Algunos matemáticos (especialmente los de Teoría de Números) prefieren no reconocer el cero como un número natural, mientras que otros, especialmente los de Teoría de Conjuntos, Lógica e Informática, tienen la postura opuesta.

Existen varias razones para no considerar el cero como número natural:

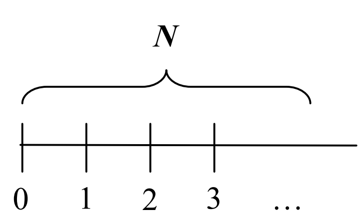
1.- Si los números naturales son los que sirven para contar, se inicia a contar a partir de uno, no de cero.

2.- Históricamente, primero surgió el uno y sus sucesores y posteriormente se descubrió el cero.

3.- La mayoría de las pruebas por inducción matemática sobre n, siendo n un número natural, inicia a partir de 1 y no de 0.

A pesar de todas estas razones, se incluirá al cero dentro del conjunto de los números naturales

Representación gráfica del Conjunto N:



2.- *ORDEN DE LOS NÚMEROS NATURALES*

- El conjunto de los números naturales es infinito.
- Esta ordenado en forma creciente.
- El cero (0) antecede a todos los números naturales.
- Todo número natural distinto de cero (0) tiene un número que le antecede y otro que le precede.

3.- *SISTEMA DE NUMERACIÓN POSICIONAL*

Un sistema de numeración es un conjunto de símbolos o cifras que se utilizan de acuerdo a ciertas reglas para representar diferentes cantidades.

(3.1) *Principios Fundamentales de un Sistema de Numeración Posicional*

- Un número de unidades de un orden cualquiera igual a la base forman una unidad de un orden inmediato superior.
- En todo tipo de sistema de numeración se pueden escribir todos los números con tantas cifras como unidades tenga la base contando el cero.
- Cada símbolo o cifra posee dos valores: Uno absoluto (propio del símbolo) y otro de acuerdo a su posición ocupada dentro de la cantidad (posicional relativo).
- El sistema de numeración más usado es el sistema de numeración decimal, se llama así, porque se basa en la agrupación de decenas.
- El mismo número puede usarse un número infinito de veces.

(3.2) *Comparación de un Sistema de Numeración Posicional con Otro no Posicional*

En los sistemas de numeración No Posicionales no se cumple el principio de valor posicional. Por esta razón, los símbolos empleados en estos sistemas tienen el mismo valor sin importar la posición ocupada dentro de una cantidad. Observe como se escribe la cantidad mil ciento once:

- En el sistema decimal esta cantidad se representa así: 1111.
- En el sistema romano esta cantidad se representará como: MCXI.

Comparando ambas expresiones, se hace notar que en el sistema decimal sólo se emplea un símbolo que toma cuatro valores distintos de acuerdo a la posición que ocupa; para escribirla en el sistema de numeración romano se tienen que usar cuatro símbolos diferentes.

En resumen, el sistema de numeración decimal es un sistema posicional, y el sistema de numeración romano es un sistema no posicional.

(3.3) *Sistema de Numeración Decimal*

Es el sistema cuya base es 10; es decir, va aumentando o disminuyendo en diez en diez. Por ejemplo: 10 unidades forman una decena y 10 decenas forman una centena, etc…

Los símbolos y cifras que se utilizan son:

$\underbrace{0}_{\text{Cifra NO Significativa}} \quad \underbrace{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9}_{\text{Cifra Significativa}}$

Este sistema de numeración cumple el principio de valor posicional.

Los símbolos o cifras empleados tienen dos valores:

a) Valor Absoluto: Es el valor propio del símbolo o cifra según su figura. Ejemplo:

3 8 5 2

3 es tres

8 es ocho

5 es cinco

2 es dos

b) Valor Relativo: Es el valor representado por un símbolo o cifra dependiendo de la posición que ocupe dentro de una cantidad. Ejemplo:

3 8 5 2

2 → 2 unidades

5 → 5 decenas =
50 unidades

8 → 8 centenas =
80 decenas =
800 unidades

3 → 3 unidades de mil =
30 centenas =
300 decenas =
3000 unidades

En el sistema decimal, siempre se cumple el principio aditivo, el cual enuncia que al sumar los valores posicionales de las cifras que componen un número, se obtiene a dicho número. Ejemplo:

6 7 4 3		
3 unidades	=	3 u
4 decenas	=	40 u
7 centenas	=	700 u
6 unidades de mil	=	$\underline{6000\ u}$
		6743

<table>
<tr><th colspan="9">Clases de Números</th></tr>
<tr><td colspan="3">Millones</td><td colspan="3">Miles</td><td colspan="3">Unidades</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ordenes</td><td colspan="3">Ordenes</td><td colspan="3">Ordenes</td></tr>
<tr><td>Centena de Millón</td><td>Decena de Millón</td><td>Unidad de millón</td><td>Centena de Mil</td><td>Decena de Mil</td><td>Unidad de Mil</td><td>Centena</td><td>Decena</td><td>Unidad</td></tr>
</table>

(3.4) <u>*Redondeo de Números Naturales*</u>

Para redondear números naturales, se deben seguir ciertas reglas básicas:

a) Con la cifra dada, se fija mentalmente una marca en el dígito al que se desea redondear. Si la primera cifra está a la derecha del dígito marcado, corresponde a un número mayor o igual a cinco (≥ 5), se suma uno al número marcado. Ejemplo:

$\underline{5}80 \cong 600 \longrightarrow$ Dígito Marcado - Centena

Aproximadamente

b) Si la cifra que esta a la derecha del dígito marcado es menor que cinco (< 5), se conserva el digito marcado. Ejemplo:

$12\underline{3}4 \Rightarrow 1230 \longrightarrow$ Dígito Marcado - Decena

En cada uno de los casos anteriores, cada uno de los dígitos sustituidos que siguen al número marcado, se deben sustituir por un cero.

4.- *OPERACIONES MATEMÁTICAS EN N*

(4.1) <u>*Suma de Números Naturales*</u>

La suma de dos números naturales, da como resultado otro número natural. Ejemplo:

$$8 + 2 = 10$$

Propiedades de la Suma de Números Naturales:

1. *Conmutativa*: El lugar o posición de los sumandos no cambia el resultado de la suma total. Ejemplo:

$$6 + 4 = 4 + 6$$
$$10 = 10$$

Fórmula: Si "a" y "b" son números naturales, entonces se cumple que:

$$a + b = b + a$$

2. *Asociativa*: Al agrupar los sumandos de una suma, siempre el resultado va a ser el mismo. Ejemplo:

$$5 + [3 + 4] = [5 + 3] + 4$$
$$5 + 7 = 8 + 4$$
$$12 = 12$$

Fórmula: Si "a", "b" y "c" son números naturales, se cumple que:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

3. *Elemento Neutro*: Todo número natural que se le sume cero (0), el resultado es el mismo número. Ejemplo:

$$4 + 0 = 4$$

(4.2) <u>*Resta de Números Naturales*</u>

Para restar dos números naturales, se resta el número menor del número mayor. Ejemplo: $6 - 2 = 4$

Fórmula: Si "a", "b" y "c" son números naturales, se cumple que:

$$a - b = c \Leftrightarrow a > b$$

Si y sólo sí

(4.3) <u>*Multiplicación de Números Naturales*</u>

Propiedades de la Multiplicación de Números Naturales:

1. *Conmutativa*: El orden de los factores no altera el producto. Ejemplo:

$$4 \text{ x } 5 = 5 \text{ x } 4$$

$$20 = 20$$

Fórmula: Si “a”, “b” y “c” son números naturales, se cumple que:

$$\text{a x b} = \text{b x a}$$

$$\text{c} = \text{c}$$

2. *Asociativa*: Al agrupar los factores de una multiplicación, no importa el orden de la agrupación, el producto va a ser el mismo. Ejemplo:

$$4\times[3\times2]=[4\times3]\times2$$

$$4\times6=12\times2$$

$$24=24$$

Fórmula: Si “a”, “b” y “c” son números naturales, se cumple que:

$$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$$

3. *Elemento Neutro*: Todo número natural multiplicado por uno (1), da el mismo número. Ejemplo:

$$3 \text{ x } 1 = 3$$

$$1 \text{ x } 3 = 3$$

Fórmula: Sea “a” un número natural, se cumple que:

$$\text{a x } 1 = 1 \text{ x a}$$

4. *Factor Cero*: Todo número natural multiplicado por cero (0), da como resultado el valor cero. Ejemplo:

$$4 \text{ x } 0 = 0 \text{ x } 4$$

$$0 = 0$$

Fórmula: Sea “a” un número natural, se cumple que:

$$\text{a x } 0 = 0 \text{ x a}$$

$$0 = 0$$

5. *Propiedad Distributiva con respecto a la suma y a la resta*: Para multiplicar una suma (o resta) por un número se multiplica cada término de la suma (o resta) por éste número. Ejemplo:

$$8\times[4+2]=8\times4+8\times2$$

$$= 32 + 16$$

$$= 48$$

$$8 \times [4 - 2] = 8 \times 4 - 8 \times 2$$

$$= 32 - 16$$

$$= 16$$

Fórmula: Si “a”, “b”, “c” y “d” son números naturales, se cumple que:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$

6. *Multiplicación por la Unidad Seguida de Ceros*: En toda operación de multiplicación de un número cualquiera por otro número constituido por la unidad seguida de ceros, el resultado es el mismo número seguido de tantos ceros como haya. Ejemplo:

   $23 \times 1\underline{0} = 23\underline{0}$ $\qquad$ $23 \times 1\underline{00} = 23\underline{00}$

7. *Multiplicidad*: Se llama múltiplo de un número a aquel que se obtiene al multiplicar ese número por otro cualquiera. Por ejemplo, los múltiplos de 5 son: 0, 5, 10, 15, … La representación de este conjunto se realiza de la siguiente manera:

$$\dot{5} = \{0,5,10,15,...\}$$

Utilizamos el punto encima del número para indicar el conjunto de los múltiplos del número

A partir de esta definición se deduce que:

- **0** (cero) es múltiplo de cualquier número.
- Todo número natural es múltiplo de **1**.
- Todo número natural es múltiplo de sí mismo.
- Ningún número es múltiplo de 0 (cero); $\dot{0} = \Phi$ (conjunto vacío de elementos).
- Todo número natural tiene infinitos múltiplos.

Para comprobar que un número natural es múltiplo de otro, basta con multiplicar uno de ellos por otro número natural, y verificar que el resultado es el segundo número natural. Por ejemplo:

¿35 es múltiplo de 5? La respuesta es que si, debido a que si se multiplica 5 x 7 el resultado es 35.

¿27 es múltiplo de 4? La respuesta es que no, ya que no existe ningún otro número natural que multiplicado por 4, de cómo resultado 27.

(4.4) *<u>División de Números Naturales</u>*

Si dos números naturales se dividen, el resultado final será un número natural, siempre y cuando se cumpla que el dividendo sea mayor que el divisor y además, que el dividendo sea múltiplo del divisor. Ejemplo:

$$20 \div 4 = 5$$

Cumple que 20 > 4, además de cumplir que el dividendo es múltiplo del divisor, ya que $4 \times 5 = 20$.

Casos especiales de División de Números Naturales:

- *Caso 1*: Si cero se divide entre cualquier número natural diferente del mismo cero, el resultado siempre será cero. Ejemplo:

$$0 \div 2 = 0$$

Fórmula: Sea “a” un número natural, se cumple que:

$$0 \div a = 0$$

- *Caso 2*: Todo número natural dividido entre cero, no pertenece al conjunto *N*. De hecho, esta operación no pertenece a ningún conjunto de números, por lo que se dice que el resultado es *Indefinido*. Por ejemplo:

$$2 \div 0 \notin N \text{, es Indefinido}$$

Divisibilidad:

Un número natural es divisible entre otro, si la división entre ellos es exacta (el valor del residuo o resto es igual a cero). De esta manera se tiene que 48 es divisible entre 6 porque al realizar la división entre ellos el cociente es 8.

Al conjunto de todos los posibles divisores de un número “X”, se puede expresar como $\underset{\bullet}{X}$. Por ejemplo: El conjunto de los divisores de 36 es:

$$\underset{\bullet}{36} = \{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$$

A partir de esta definición se deduce que:

◆ Todo número, no nulo, es divisor de 0 (cero): $\underset{\bullet}{0} = \{1,2,3,4,...\}$

◆ Todo número diferente de cero tiene un número finito de divisores.

Números Primos:

Son los números que solo son divisibles entre ellos mismos y la unidad. Es decir: $\underset{\bullet}{X} = \{1, X\}$. El resto de los números que no son primos, se les llama *Números Compuestos*.

No es fácil reconocer a los números primos, sobre todo cuando ellos son de varias cifras. Por ejemplo, el 10207 no es primo ya que: $\underset{\bullet}{10207} = \{1,59,173,10207\}$. Mientras que el número 10006721 es primo. Algunos números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13…

Los números primos son, en cierto modo, como los elementos químicos. A partir de los elementos químicos se forman todos los compuestos químicos y a partir de los números primos podemos obtener el resto de los números.

Criterios de Divisibilidad:

◆ Un número es DIVISIBLE entre dos (2) si termina en cero (0) o cifra par. Por ejemplo: 26, 38, 150.

◆ Un número es DIVISIBLE entre tres (3) si la suma de sus dígitos es múltiplo de tres (3). Por ejemplo: 27 (2+7 = 9, múltiplo de 3), 100101 (1+0+0+1+0+1 = 3, múltiplo de 3).

◆ Un número es DIVISIBLE entre cinco (5) si termina en cero (0) o cinco (5). Por ejemplo: 105, 5290, 5006870.

◆ Un número es DIVISIBLE entre siete (7) cuando al separar la última cifra de la derecha, multiplicarla por dos y restar ese producto a la cifra que queda, da como resultado cero o un múltiplo de siete. Ejemplo:

En el número 49, al separar su última cifra queda 9. El 9 se multiplica por 2 y al resultado se le resta la cifra que quedó, que en este caso es el 4 $(9 \times 2 = 18 - 4 = 14)$. El resultado de toda esta operación es 14, el cual es un número múltiplo de 7, por lo tanto, el 49 es divisible entre 7.

◆ Un número es DIVISIBLE entre once (11) cuando al sumar las cifras de los lugares pares, luego suman las cifras de los lugares impares y estos dos resultados se restan entre sí, el resultado es cero o un número múltiplo de once. Ejemplo:

121 $\qquad$ 1 + 1 = 2 $\qquad$ 2 $\qquad$ 2 - 2 = 0

(4.5) *Potenciación de Números Naturales*

Cuando un número natural se eleva a un exponente, donde dicho exponente indica las veces en la que el número natural se va a multiplicar el mismo. El resultado será un número natural. Ejemplo:

$$(2)^4 = 2\times 2\times 2\times 2 = 16$$

Fórmula: Sean "a", "b" y "c" números pertenecientes al conjunto de los números naturales, se tiene que:

$$(a)^b = \underbrace{a\times a\times a\times \ldots\times a}_{} = c$$

b veces, donde b representa al exponente

Nota: Como propiedad importante, se debe hacer notar que todo número elevado a la cero potencia, debe dar como resultado uno (1).

4.5.1.- Propiedades de la Potenciación:

a)- *Potencia de exponente uno (1)*

Toda potencia de exponente uno (1), tiene como resultado la base, es decir para todo número real "*x*", tenemos que

$$\boldsymbol{x^1 = x}$$

Por ejemplo:

a) $2^1 = 2$ $\qquad$ b)$(-5)^1 = -5$ $\qquad$ c) $y^1 = y$ $\qquad$ d) $x^1 = x$

b) *Potencia de exponente cero (0)*

Toda potencia de exponente cero (0), si la base es diferente de cero, tiene como resultado 1.

Esta propiedad se denota de la siguiente forma: Para cualquier número "*x*" ≠ 0, se tiene

que: $\boldsymbol{x^0 = 1}$

Por ejemplo:

i. $(-2)^0 = 1$; $\qquad$ ii. $5^0 = 1$; $\qquad$ iii. $y^0 = 1$; $\qquad$ iv. $x^0 = 1$

c) _Potencia de potencia:_

Cuando tenemos una expresión como $(x^n)^k$, se denomina potencia de potencia y se resuelve escribiendo la misma base y se multiplican los exponentes. Es decir que para todo número real x, tenemos:

$$\left(x^n\right)^k = x^{(n)(k)}$$

por ejemplo:

i) $(2^3)^2 = (2)^{3\,.\,2} = (2)^6 = 64$

En el siguiente ejemplo no se desarrollará la potencia, porque la base es una variable.

ii) $(x^4)^6 = (x)^{4\,.\,6} = x^{24}$

ERROR COMUN: $\left(x^4\right)^6 = x^{4+6} = x^{10}$	*En la potencia de potencia no se pueden sumar los exponentes, sino multiplicarlos:* $\left(x^4\right)^6 = x^{4\cdot 6} = x^{24}$

e) _Multiplicación de potencias de igual base:_

Cuando multiplicamos potencias que poseen la misma base, se resuelve escribiendo la misma base y sumando los exponentes, para luego resolver la potencia, es decir : $\mathbf{(x^n)(x^k) = x^{n+k}}$

Ejemplo: Resuelva la siguiente operación: $(2^3)\,(2^4)$

Solución:

$$\begin{aligned}(2^3)(2^4) &= 2^{3+4}\\ &= 2^7\\ &= (2)(2)(2)(2)(2)(2)(2)\\ &= 128\end{aligned}$$

Respuesta: $(2^3)(2^4) = 128$

Ejemplo: Resuelva la siguiente operación: $(x^5)\,(x^3)$

Solución:

$$(x^5)(x^3) = x^{5+3}$$

$= x^8$

Respuesta: $(x^5)(x^3) = x^8$

Ejemplo: Resolver : $(y^6)(x^4)(y^4)(x^7)$

Solución:

$(y^6)(x^4)(y^4)(x^7) = (y^6)(y^4)\ (x^4)(x^7)$

Seleccionamos las potencias de igual base y las agrupamos

$= (y^{6+4})(x^{4+7})$

$= (y^{10})(x^{11})$

Respuesta: $(y^6)(x^4)(y^4)(x^7) = (y^{10})(x^{11})$

ERROR COMUN: $x^4.x^3 = x^{4\,.\,3} = x^{12}$	*En la multiplicación de potencias de igual base, los exponentes no se multiplican, se suman :* $x^4.x^3 = x^{4+3} = x^7$

f) *División de potencias de igual base:*

Cuando dividimos potencias de igual base, se resuelve escribiendo la misma base y restando el exponente del numerador menos el exponente del denominador, para luego resolver la potencia, es decir:

$$\frac{x^n}{x^k} = x^{n-k},\ x \neq 0$$

por ejemplo:

a) $\dfrac{2^4}{2^3} = 2^{4-3} = 2^1 = 2$ b) $\dfrac{X^6}{X^2} = X^{6-2} = X^4$

Cuando el exponente es negativo se invierte la expresión para que el exponente quede positivo. Veamos el siguiente ejemplo:

b) $\dfrac{a^{13}}{a^{15}} = a^{13-15} = a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}$

Nota:

Para las operaciones de suma o resta de potencias no existen reglas que se puedan seguir. Para resolver la suma o resta de potencias se resuelve cada potencia y si éstas resultan términos semejantes se suman o se restan, de lo contrario se deja indicado.

Veamos a continuación algunos ejemplos:

Ejemplo: Resolver : $12\cdot(x^3)\cdot(x^5)-5\cdot(x^4)^2+4\cdot(x^3)\cdot(x^2)$

Solución:

$$12\cdot(x^3)\cdot(x^5)-5\cdot(x^4)^2+4\cdot(x^3)\cdot(x^2)$$

$$=12\cdot(x^{3+5})-5\cdot(x^{4\cdot 2})+4\cdot(x^{3+2})$$

Resolvemos cada una de las potencias

$$=12\cdot x^8-5\cdot x^8+4\cdot x^5$$

$$=(12-5)\cdot x^8+4\cdot x^5$$

$$=7\cdot x^8+4\cdot x^5$$

Agrupamos los términos semejantes

Respuesta: $12\cdot(x^3)\cdot(x^5)-5\cdot(x^4)^2+4\cdot(x^3)\cdot(x^2)=7\cdot x^8+4\cdot x^5$

ERROR COMUN: $x^3+x^2=x^{3+2}=x^5$	*En la suma (o resta) de potencias, donde la base es variable y los exponentes son diferentes no existe ninguna regla a seguir, en estos casos se deja indicado:* x^3+x^2

Ejemplo: Resolver : $(2^3)\cdot(3^2)+3\cdot(2^4)^2-7\cdot(2^2)\cdot(3^2)$

Solución:

$$(2^3)\cdot(3^2)+3\cdot(2^4)^2-7\cdot(2^2)\cdot(3^2)$$

$$=(8)\cdot(9)+3\cdot(16)^2-7\cdot(4)\cdot(9)$$

Resolvemos cada una de las potencias

$$=72+768-252$$

$$=840-252$$

$$=588$$

Sumamos y restamos las cantidades.

Respuesta: $(2^3)\cdot(3^2)+3\cdot(2^4)^2-7\cdot(2^2)\cdot(3^2)=588$

(4.6) *Descomposición de Números en Factores Primos*:

"*Teorema Fundamental De La Aritmética:* Todo número puede natural se puede descomponer siempre como producto de números primos y esa descomposición es única". De esta manera, para descomponer un números en sus factores primos se divide éste entre su divisor más pequeño y luego se repite lo mismo en forma sucesiva con el cociente de la división anterior hasta llegar a uno (1). Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Es decir que el número 28 se puede expresar como: $28 = 2.2.7 = 2^2.7$

(4.7) *Mínimo Común Múltiplo (m.c.m.)*:

El m.c.m. de dos o más números naturales, es el menor número natural de los múltiplos comunes a varios números. Para hallar el m.c.m. de dos o más números naturales se pueden utilizar dos métodos.

1^er^ Método:

1. Hallar los múltiplos de los números dados.
2. Tomar los múltiplos comunes de los números dados.
3. Al menor múltiplo común es al que se le llama m.c.m.

Ejemplo: Calcular el mínimo común múltiplo de 5 y 3.

Paso 1: $\dot{5}=\{5,10,15,20,25,30,35,...\}$

$\dot{3}=\{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,...\}$

Paso 2: Múltiplos comunes: $\{15,30,45,...\}$

Paso 3: El menor múltiplo común entre 3 y 5 es 15, por lo que m.c.m. (3,5)= 15.

2^do^ Método:

1. Descomponer los números dados en sus factores primos y expresar el resultado en forma de potencia.

2. El m.c.m. será el producto de aquellos factores COMUNES Y NO COMUNES a todos los números dados con el MAYOR EXPONENTE.

   Ejemplo: El m.c.m. de 16, 24 y 40

$$
\begin{array}{r|l}
16 & 2 \\
8 & 2 \\
4 & 2 \\
2 & 2 \\
1 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
24 & 2 \\
12 & 2 \\
6 & 2 \\
3 & 3 \\
1 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
40 & 2 \\
20 & 2 \\
10 & 2 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
$$

$$16 = 2.2.2.2 = 2^4; \qquad 24 = 2.2.2.3 = 2^3.3; \quad 40 = 2.2.2.5 = 2^3.5$$

En este caso el único factor común es el dos (2) y su mayor exponente es cuatro (4) y los factores no comunes son el tres (3) y el cinco (5) cuyo mayor exponente es (1) para ambos casos, por ello:

$$\text{m.c.m. } (16, 24, 40) = 2^4.3.5 = 240$$

4.8) *Máximo Común Divisor (M.C.D.)*:

Se llama M.C.D. de dos o más números naturales al mayor número capaz de dividir a todos exactamente. Para hallar el M.C.D. de dos o más números naturales se tienen dos métodos:

1^er Método:

1. Hallar los divisores de los números dados.
2. Tomar los divisores comunes de los números dados.
3. Al mayor divisor común de los números dados es lo que se llama M.C.D.

Ejemplo: Calcular el máximo común divisor de 20 y 30.

Paso 1: $\underset{\bullet}{20} = \{1,2,4,5,10,20\}$

$\underset{\bullet}{30} = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$

Paso 2: Divisores comunes: $\{1,2,5,10\}$

Paso 3: El mayor divisor común entre 20 y 30 es 10, por lo que M.C.D.(20,30)=10.

2^do Método:

1. Descomponer los números dados en sus factores primos y expresar el resultado en forma de potencia.

2. El M.C.D. será el producto de aquellos factores COMUNES a todos los números dados con el MENOR EXPONENTE.

   Ejemplo: ¿El M.C.D. de 16, 24 y 40 será?

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$16 = 2.2.2.2 = 2^4 \qquad 24 = 2.2.2.3 = 2^3.3 \qquad 40 = 2.2.2.5 = 2^3.5$$

En este caso el único factor común es el dos (2) y su menor exponente es tres (3) por ello:

$$\text{M.C.D. } (16, 24, 40) = 2^3 = 8$$

<u>*Definición*</u>: Dos números son *PRIMOS RELATIVOS* si y sólo si el *M.C.D.* entre estos dos es 1. Por ejemplo, el 5 y el 21 son primos relativos ya que el *M.C.D.* entre ellos es 1 (Verificarlo).

5.- *NÚMEROS DECIMALES*

Un Número Decimal o Expresión Decimal, como también se le llama, está formada por una serie de cifras separadas por una coma. Las cifras situadas a la izquierda de la coma forman la parte entera de la expresión decimal, y las cifras situadas a la derecha de la coma forman la parte decimal.

$$\text{Expresión Decimal} \Rightarrow \underbrace{350}_{\text{Parte Entera}},\underbrace{27}_{\text{Parte Decimal}}$$

5.1) <u>*Orden de Números Decimales*</u>:

Cuando se comparan números que tienen una parte entera y una parte decimal, se toma como base de comparación al <u>Valor De Posición</u> de sus cifras. Por lo tanto, será mayor el que posea la mayor parte entera. Por ejemplo, para ordenar las siguientes cantidades: 2,1; 3,5, 0,7 y 4,1 se examina la parte entera y luego se puede escribir que:

$$4{,}1 > 3{,}5 > 2{,}1 > 0{,}7$$

Símbolo de "Mayor que"

Si las cantidades que se están comparando tienen la misma parte entera, se procede a comparar la parte decimal. En el siguiente ejemplo se compara a 2,29; 2,5 y 2,285.

Como la parte entera es igual, se procede a comparar las décimas. Si estas son iguales, se comparan las centésimas y así sucesivamente. En este caso, el número mayor será el 2,5 porque 5 décimas es mayor que 2 décimas. Luego, al comparar al 2,29 con el 2,285 se procede a comparar las centésimas, en donde 9 centésimas es mayor a 8 centésimas, por lo que el orden final será:

$$2{,}5 > 2{,}29 > 2{,}285$$

5.2) *Aproximación de los Números Decimales*:

Cuando un número decimal tiene muchas cifras decimales, se puede aproximar a partir de cualquiera de sus cifras. Para ilustrar esto, se tomará como ejemplo la aproximación del número 15,8316:

1. *Caso 1*: Aproximación a la Parte Entera: Se examina el valor de la décima y se usa el mismo criterio usado anteriormente para redondear; es decir, si esta cifra es cinco o mayor a cinco, entonces se aumenta en una unidad a la parte entera, y si no, entonces se coloca el mismo valor. Para este caso, la décima es igual a 8, que corresponde al caso $8 \geq 5$, por lo que se debe aumentar un valor a la unidad, resultando:

$$15{,}8316 \cong 16$$

2. *Caso 2*: Aproximación a las Décimas: En este caso se examina el valor de la centésima y se usa el mismo criterio usado en el Caso 1. Para nuestro ejemplo el valor de la centésima es 3, por lo que corresponde al caso donde $3 < 5$. Por lo que la aproximación quedará:

$$15{,}8316 \cong 15{,}8$$

3. *Caso General*: Siempre que se quiera aproximar una cantidad, se debe examinar la cifra que se encuentra a la derecha de la posición donde se quiera realizar dicha aproximación, y siempre se utiliza el criterio expresado en el caso 1 para decidir la escritura final del número.

5.3) División entre la Unidad Seguida de Ceros:

En toda operación de división de un número cualquiera por otro número constituido por la unidad seguida de ceros, el resultado es el mismo número desplazando tantos espacios hacia la izquierda como ceros haya, y colocando una coma en esa posición. Ejemplo:

$23 \div 1\underline{0} = 2{,}\underline{3}$

$23 \div 1\underline{000} = 0{,}\underline{023}$ } Como no hay más dígitos,

$23 \div 1\underline{0000} = 0{,}0\underline{023}$ } se completa con ceros

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Aproxima los siguientes números, de acuerdo al número señalado entre paréntesis:

a) 876 (centena).

b) 19345 (unidad de mil).

c) 56000345 (unidad de millón).

d) 45, 891 (unidad)

e) 455,678 (centésima).

f) 326,1 (milésima).

g) 456,398 (decena).

h) 526,89589 (décima).

2.- El número 18064560:

a) ¿Cuántas unidades de millón tiene?

b) ¿Cuántas decenas de mil tiene?

c) ¿Cuántas unidades de mil tiene?

d) ¿Cuántas unidades tiene?

3.- Aplica, verifica y efectúa la propiedad asociativa:

a) 2365,28 + 5470 + 3,1 =

b) 5263,2669 + 650 + 3,0025 =

4.- Aplica, verifica y efectúa la propiedad distributiva:

a) (56323 + 32,5) x 589,256 =

b) 5600 x (5,26 + 258,005) =

5.- Determine el conjunto formado por los diez primeros múltiplos naturales de los siguientes números:

a) 2 b) 5 c) 9 d) 16 e) 151 f) 215

g) 1023

6.- Determine todos los posibles divisores de cada uno de los siguientes números naturales:

a) 16 b) 84 c) 23 d) 300 e) 121 f) 1215

g) 3000

7.- Determine el conjunto de los primeros veinte números primos.

8.- Identifique en cada uno de los casos si el número dado es un número primo o compuesto. Justifique su respuesta:

a) 3528 b) 101 c) 307 d) 4131 e) 5395 f) 1215 g) 1121

9.- Descomponer en factores primos los siguientes números primos:

a) 342 b) 1188 c) 2575 d) 441 e) 2904 f) 840 g) 121

10.- Calcula el m.c.m. de los siguientes números:

a) 16, 24 y 40 b) 5, 7, 10 y 14 c) 25, 50, 75 y 100 d) 294, 98 y 96 e) 648, 360, 225 y 300 f) 45, 441, 250 y 504

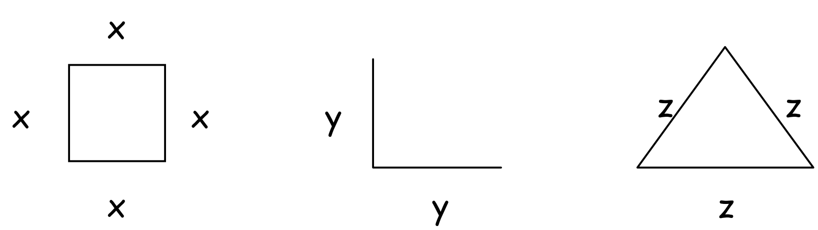
11.- Calcular el M.C.D. de los números indicados en el ejercicio anterior.

12.- ¿Entre cuál número será siempre divisible la suma de tres números naturales consecutivos?

13.- ¿Cuál es el valor de la suma de los divisores primos del número 1992?

14.- ¿Cuál es la medida de la regla centimetrada de mayor longitud con la que se pueden medir exactamente las tres longitudes siguientes: 60cm, 120cm y 400cm?

15.- Un pedazo de alambre cuya longitud está comprendida entre 40 y 50cm, se puede doblar de modo que se puedan construir las figuras anexas. ¿Cuánto mide el alambre si cada trozo se mide en unidades enteras?



16.- Cuando se hace desfilar una banda de música en filas de 2, de 3 o de 4 músicos, siempre queda un hueco en la última fila. Sin embargo, al hacerla desfilar en filas de 5 todo cuadra perfectamente. ¿Cuál es el número de músicos que integran la banda?

17.- La constitución de un país establece que los Diputados se eligen cada 4 años, los Senadores cada 5 años, y el Presidente cada 8 años. Si en 1980 coincidieron todas las elecciones, ¿en qué año volverán a coincidir?

18.- Si "N" y "n" son dos números naturales tales que: N = ababab y n = ab, siendo "a" y "b" los dígitos de cada número, y n ≠ 0, entonces al dividir "N" entre "n", ¿cuál será el valor del cociente y del residuo en esa división?