República Bolivariana de Venezuela

Ministerio de la Defensa

Universidad Nacional Experimental Politécnica de la Fuerza Armada

Núcleo Caracas

Curso de Inducción Universitaria CIU

Cátedra: ***Razonamiento Matemático***

FACTORIZACIÓN

GUÍA CIU NRO: 7

COMISIÓN DE APOYO A RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Integrado por:

INTEGRANTES:

Ing. Beliana Gómez
Ing. Elvia Moreno
Ing. Mixef Rojas
Lic. Teresa Gómez
Prof. Neida González

FACTORIZACIÓN

El proceso de convertir una expresión (polinómica o no) en factores, recibe el nombre de factorización (factores son los números o expresiones que se multiplican).

Por ejemplo, factorizar los siguientes números, significa descomponerlos en sus factores primos , así tenemos que:

$15 = 3 \times 5$ $\quad 27 = 3^3$ $\quad 99 = 3^2 \times 11$

En álgebra se emplean técnicas que nos ayudan a factorizar expresiones algebraicas, dichas técnicas son las que vamos a tratar en esta guía.

La factorización es muy útil para simplificar expresiones y encontrar sus equivalentes, particularmente para resolver ecuaciones. A continuación trabajaremos los diferentes técnicas para factorizar.

1.- *Factor Común:*

Este tipo de factorización se utiliza, cuando todos los términos de la expresión algebraica tienen un factor que se repite, el cual se denomina factor común. El factor común puede ser definido como el máximo común divisor (MCD) de los términos de la expresión algebraica que se quiere factorizar. Veamos algunos ejemplos.

Ej. 1. Factorice la expresión $2x^9 - 18x^6$

Para factorizar la expresión por factor común procedemos así:

Paso 1: Calcular el máximo común divisor entre los coeficientes de cada término:2 y 18

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$18 = 2 \times 3^2$ $\quad 2 = 2$ $\quad \Rightarrow MCD(2,18) = 2$

Paso 2: Se toma la potencia con el menor exponente de los términos de la expresión, en este caso es x^6.

Paso 3: El factor común estará formado por el producto del máximo común divisor de los coeficientes multiplicado por la potencia con el menor exponente, en este caso el factor común es $2x^6$

Paso 4: El otro factor (x^3-9), se obtiene al dividir cada término de la expresión dada entre el factor común como sigue:

$$\frac{2x^9}{2x^6} = x^3 \qquad y \qquad \frac{-18x^6}{2x^6} = -9$$

Paso 5: Finalmente la factorización del polinomio es el producto de los factores obtenidos, es decir: **Respuesta:** $2x^9 - 18x^6 = 2x^6.(x^3 - 9)$.

<u>Ej.2.</u> Factorice la expresión $\frac{1}{6}x^3y^2 - \frac{3}{4}x^4z^2$

<u>Solución:</u>

El **factor común** es $\frac{1}{2}x^3$, debido a que divide cada término. Observe que x^3 es la única potencia con base literal común a ambos términos.

Por otro lado fíjese en que $\frac{1}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$ *y en* $\frac{3}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)$, de aquí se ve que $\frac{1}{2}$ es un factor común de ambos coeficientes. También, puede obtenerse como el factor común numérico del numerador (es 1) entre el factor numérico del denominador (es 2): $\frac{1}{2}$.

Respuesta: $\frac{1}{6}x^3y^2 - \frac{3}{4}x^4z^2 = \frac{1}{2}x^3\left(\frac{1}{3}y^2 - \frac{3}{2}xz^2\right)$

<u>Ej.3.</u> Factorice la expresión $-42\ a^3bc^6 - 56a^5b^2c^5 - 28a^4b^3c^4$

<u>Solución:</u>

Para la expresión $-42\ a^3bc^6 - 56a^5b^2c^5 - 28a^4b^3c^4$, el **factor común** es $-14a^3bc^4$, Luego nos queda:

$$-42a^3bc^6 - 56a^5b^2c^5 - 28a^4b^3c^4 = -14a^3bc^4\left(3c^2 + 4a^2bc + 2ab^2\right)$$

Recuerde que el factor común es el M.C.D de los coeficientes multiplicado por las potencias de base literal con menor exponente.

En este caso el MCD(42,56,28) = 14, y las potencias de base literal con menor exponente son $a^3, b\ y\ c^4$, además observe que el "-1" también es parte del factor común, puesto que es parte de todos los términos. Por esta razón el factor común es $-14a^3bc^4$.

Respuesta<u>:</u> $-42\ a^3bc^6 - 56a^5b^2c^5 - 28a^4b^3c^4 = -14a^3bc^4\left(3c^2 + 4a^2bc + 2ab^2\right)$

<u>2.- Diferencia de dos cuadrados:</u>

Para factorizar una diferencia de cuadrados se escribe cada término igual a un cuadrado perfecto: $x^2 - a^2$. La factorización de una diferencia de cuadrados se expresa como: $(x + a)(x - a)$. Finalmente podemos llegar a la siguiente conclusión:

$$\boxed{x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)}$$

Cuando la expresión a factorizar es una diferencia de dos cuadrados $x^2 – a^2$, se procede así:

Paso 1: Se escriben cada uno de los términos como un cuadrado perfecto.

Paso 2: Se escribe la suma y la resta de las bases de los cuadrados.

Paso 3: Se multiplica la suma por su diferencia.

Paso 4: Finalmente se expresa la factorización

Al factorizar la diferencia de dos cuadrados obtenemos uno de los casos de producto notable. Por lo tanto si quieres comprobar que la expresión este bien factorizada sólo desarrolla el producto notable que has obtenido y compara si el resultado es exactamente igual a la expresión dada para factorizar.

Veamos a continuación los siguientes ejemplos:

<u>Ej.4.</u> Factorice la expresión $x^2 – 16$

<u>Solución:</u>

- Escribimos cada uno de los términos como cuadrados perfectos: $x^2 = (x)^2$ y $16 = (4)^2$
- Así las bases de las potencias de los dos cuadrados son : x y 4.
- Se escribe la suma y la diferencia de las bases de la potencias :

$$\left.\begin{array}{l}(x + 4)\\(x - 4)\end{array}\right\} \text{Suma y diferencia de las bases de los cuadrados}$$

- Se multiplica la suma por su diferencia

$(x + 4) \cdot (x - 4)$

- Finalmente se expresa la factorización así:

Respuesta: $x^2 – 16 = (x + 4) \cdot (x - 4)$

<u>Ej.5.</u> Factorice la expresión $4x^2 – 9$

<u>Solución:</u>

- Escribimos cada uno de los términos como un cuadrado

$4x^2 = 2^2 \cdot x^2 = (2 \cdot x)^2$; $9 = 3^2$

- Se escribe la suma y la diferencia entre las bases de los cuadrados

$$\left.\begin{array}{l}(2x + 3)\\(2x - 3)\end{array}\right\} \text{Suma y diferencia de las bases de los cuadrados}$$

- Se multiplica la suma por su diferencia $(2x + 3) \cdot (2x - 3)$
- Finalmente se expresa la factorización así:

Respuesta: $4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$

Ej.6. Factorice la expresión $\frac{16}{25}y^6 - 36x^8$.

- Escribimos cada uno de los términos como un cuadrado

$\frac{16}{25}y^6 = (\frac{4}{5}y^3)^2$; $36x^8 = 6^2 \cdot (x^4)^2 = (6x^4)^2$

- Se escribe la suma y la diferencia entre las bases de los cuadrados

$\left(\frac{4}{5}y^3 + 6x^4\right)$

$\left(\frac{4}{5}y^3 - 6x^4\right)$

Suma y diferencia de las bases de los cuadrados

- Se multiplica la suma por su diferencia $\left(\frac{4}{5}y^3 + 6x^4\right) \cdot \left(\frac{4}{5}y^3 - 6x^4\right)$
- Finalmente se expresa la factorización así:

Respuesta: $\frac{16}{25}y^6 - 36x^8 = \left(\frac{4}{5}y^3 + 6x^4\right) \cdot \left(\frac{4}{5}y^3 - 6x^4\right)$

Ej.7. Factorice la expresión $(x+1)^2 - y^2$.

- Observamos que cada uno de los términos ya está escrito como un cuadrado perfecto : $(x+1)^2$; $y^2 = (y)^2$
- Se escribe la suma y la diferencia entre las bases de los cuadrados

$(x+1) + y$ y $(x+1) - y$

- Se multiplica la suma por su diferencia $\left((x+1) + y\right)\left((x+1) - y\right)$
- Finalmente se expresa la factorización así:

Respuesta: $(x+1)^2 - y^2 = \left((x+1) + y\right)\left((x+1) - y\right)$

Ej.8. Factorice la expresión $(x+y)^2 - (y+3)^2$.

- Los términos ya están escritos como cuadrados perfectos $(x+y)^2$; $(y + 3)^2$

Se escribe la suma y la diferencia entre las bases de los cuadrados

$(x+y) + (y+3) = x + y + y + 3 = x + 2y + 3$ Suma entre las bases

$(x+y) - (y+3) = x + y - y - 3 = x - 3$ Diferencia entre las bases

- Se multiplica la suma por su diferencia

$$\left(x+2y+3\right)\left(x-3\right)$$

- Finalmente se expresa la factorización así:

Respuesta: $(x+y)^2-(y+3)^2 \;=\; \left(x+2y+3\right)\left(x-3\right)$

Algunas veces se nos presentan casos donde es necesario factorizar expresiones donde los términos **no son** cuadrados perfectos. A continuación veremos como procedemos en estos casos:

Paso 1: Se buscan las raíces cuadradas positivas de cada término

Paso 2: Se escribe la suma y la resta .

Paso 3: Se multiplica la suma por su diferencia .

Paso 4: Finalmente se expresa la factorización.

Ej.9. Factorice la expresión $x-5$

Solución:

- Buscamos las raíces cuadradas positivas de cada término, en este caso son

$\sqrt{x}$ y $\sqrt{5}$, observe que no son exactas por lo tanto las dejamos indicadas.

Se escribe la suma y la diferencia entre las raíces

$\sqrt{x}+\sqrt{5}$ (Suma entre las raíces)

$\sqrt{x}-\sqrt{5}$ (Diferencia entre las raíces)

- Se multiplica la suma por su diferencia

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)$$

- Finalmente se expresa la factorización así:

Respuesta: $x-5=\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)$

Existen expresiones que para factorizarla, hay que aplicar más de una técnica. Veamos a continuación el siguiente ejemplo.

Ej.10. Factorice la expresión $147x^5-27x$.

Solución:

- A simple vista se ve que este no es un caso de diferencia de cuadrados, sin embargo se puede factorizar por factor común.

$147x^5 – 27x \quad = \quad 3x\,(49x^4 – 9)$ (Factor común $3x$)

Observe que el factor $49x^4 – 9$ si es una diferencia de dos cuadrados perfectos y se factoriza como tal: $49x^4 = (7x^2)^2$ y $9 = 3^2$, entonces $49x^4 – 9 = (7x^2 + 3).(7x^2 – 3)$. Luego

Respuesta: $147x^5 – 27x = 3x\,(7x^2 + 3)(7x^2 – 3)$

<u>Ej.11.</u> Factorice la expresión $80x^3y^2 – 45xy^4$.

<u>Solución:</u>

- A simple vista se ve que este no es un caso de diferencia de cuadrados, sin embargo se puede factorizar por factor común.

$80x^3y^2 – 45xy^4 \quad = \quad 5xy^2\,(16x^2 – 9y^2)$ (Factor común $5xy^2$)

- Observe que el factor $16x^2 – 9y^2$ si es una diferencia de dos cuadrados y se factoriza como tal: $16x^2 = (4x)^2$ y $9y^2 = (3y)^2$, entonces

$$16x^2 – 9y^2 = (4x + 3y).(4x – 3y)$$

Por lo tanto **Respuesta:** $80x^3y^2 – 45xy^4 \quad = \quad 5xy^2 \cdot (4x + 3y).(4x – 3y)$

<u>Observación:</u> La suma de cuadrados o de binomios cuyos términos(ambos) están elevados a potencias pares no son factorizables, así binomios de la forma $x^2 + y^2$***,*** $a^4 + b^4$***,*** $a^6 + 1$***,*** $x^{2n} + a$***, con*** $a > 0$ ***no se pueden factorizar. En estos casos las expresiones quedan de la misma forma.***

<u>3.- Diferencia de dos cubos</u>

Para aplicar este método de factorización, necesariamente la expresión a factorizar tiene que ser la resta de dos términos que sean cubos de una expresión, es decir: $x^3 – a^3$. La factorización de una diferencia de cubos se expresa como el producto de dos polinomios donde el primer polinomio es igual a la diferencia de las bases de los cubos $(x - a)$ y el segundo es un trinomio igual a la suma de los cuadrados de las bases mas el producto de las bases $(x^2 + a^2+ax)$, es decir :

Es decir:

$$\boxed{x^3 – a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2).}$$

Para factorizar una expresión como ésta: $x^3 - a^3$, se siguen los siguientes pasos:

Paso 1: Escribir cada uno de los términos como un cubo: $x^3 - a^3$

Paso 2: Se escribe la diferencia de las bases de los cubos ($x - a$), este va a ser uno de los factores.

Paso 3: El otro factor es un trinomio de la forma $x^2 + ax + a^2$, en el que sus términos van a ser:

- el cuadrado de la primera base (x^2)
- "+" el producto de las dos bases (ax)
- "+" el cuadrado de la segunda base (a^2)

Paso 4: Se multiplican los factores encontrados en los pasos anteriores.

Paso 5: Finalmente se expresa la factorización así $x^3 – a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$

Si usted quiere comprobar que su Factorización está correcta sólo debe resolver el producto que queda indicado, aplicando la propiedad distributiva.

Veamos los siguientes ejemplos:

__**Ej.12.**__ Factorice la expresión $27x^3 – 8$

__**Solución:**__

Paso 1: Se escriben cada uno de los términos como cubos :

$$\left(27x^3\right) = 3^3\, x^3 = (3x)^3, \qquad 8 = (2)^3$$

Paso 2: Se escribe la diferencia de las bases $3x - 2$. Este es uno de los factores.

Paso 3: Obtenemos el segundo factor $9x^2 + 6x + 4$ así:

El cuadrado de la primera base: $(3x)^2 = 9x^2$

\+ El producto de las bases: $3x \cdot 2 = 6x$

\+ El cuadrado de la segunda base: $(2)^2 = 4$

Paso 4: Finalmente se expresa la factorización así:

Respuesta: $27x^3 - 8 = (3x - 2)\cdot\left(9x^2 + 6x + 4\right)$

__**Ej.13.**__ Factorice la expresión $\dfrac{1}{8}x^9 - \dfrac{125}{64}y^6$.

__**Solución:**__

- Escribo cada uno de los términos como un cubo:

$\dfrac{1}{8}x^9 = \dfrac{1^3}{2^3}\left(x^3\right)^3 = \left(\dfrac{1}{2}x^3\right)^3$ y $\dfrac{125}{64}y^6 = \dfrac{5^3}{4^3}\left(y^2\right)^3 = \left(\dfrac{5}{4}y^2\right)^3$ y aplicando los pasos 2, 3 y 4, nos queda:

Respuesta: $\frac{1}{8}x^9 - \frac{125}{64}y^6 = \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{4}y^2\right)\cdot\left(\frac{1}{4}x^6 + \frac{5}{8}x^3y^2 + \frac{25}{16}y^4\right)$

<u>Ej.14.</u> Factorice la expresión $432a^{10} - 2a^4$

<u>Solución:</u>

A simple vista este caso no es de diferencia de cuadrados ni de diferencia de cubos, sin embargo la expresión tiene factor común, veamos:

$432a^{10} - 2a^4$

$= 2a^4\,(216a^6 - 1)$ [Factor común $2a^4$]

Con algo de práctica, se puede notar que el factor $(216a^6 - 1)$ es una diferencia de cubos, por tanto se factoriza como tal..

$= 2a^4\,(6a^2 - 1)\,(36a^4 + 6a^2 + 1)$

Respuesta: $432a^{10} - 2a^4 = 2a^4\,(6a^2 - 1)\,(36a^4 + 6a^2 + 1)$

<u>4.- Suma de dos cubos</u>

Para aplicar este método de factorización, necesariamente la expresión a factorizar tiene que ser la suma de dos términos que sean cubos de una expresión, es decir: $x^3 + a^3$. La factorización de una suma de cubos se expresa como el producto de dos polinomios donde el primer polinomio es igual a la suma de las bases de los cubos $(x + a)$ y el segundo es un trinomio igual a la suma de los cuadrados de las bases menos el producto de las bases $(x^2 + a^2 - ax)$, es decir :

. Finalmente podemos llegar a la siguiente conclusión:

$$\boxed{x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)}$$

Veamos el algoritmo para factorizar este tipo de fracciones:

Paso 1: Se escriben cada uno de los términos como un cubo: $x^3 + a^3$, la base del primer cubo "x^3" es "x" y la del segundo cubo "a^3" es "a".

Paso 2: Se escribe la suma de las bases de los cubos $(x + a)$, este va a ser unos de los factores.

Paso 3: El otro factor es un trinomio de la forma $x^2 - ax + a^2$, en el que sus términos van a ser:

- El cuadrado de la primera base (x^2),
- "-" el producto de las bases (ax),
- "+" el cuadrado de la segunda base (a^2),

Paso 4: Se multiplican los factores encontrados en los pasos anteriores.

Paso 5: Finalmente se expresa la factorización así $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$

Igual que en el caso anterior para verificar que la expresión dada está bien factorizada desarrolle el producto que ésta indica. Veamos los siguientes ejemplos:

Ej.15. Factorice la expresión $8z^3 + 125$

Solución:

Paso 1: Se escriben cada uno de los términos como un cubo:

$$8z^3 = 2^3 z^3 = (2z)^3 \quad \text{y} \quad 125 = (5)^3$$

Paso 2: Se escribe la suma de las bases: $2z + 5$. Este es uno de los factores.

Paso 3: Obtenemos el segundo factor $4z^2 - 10z + 25$ así:

El cuadrado de la primera base $(2z)^2 = 4z^2$

- El producto de las bases $2z \cdot 5 = 10z$

+ El cuadrado de la segunda base $(5)^2 = 25$

Paso 4: Finalmente se expresa la factorización así:

Respuesta: $8z^3 + 125 = (2z + 5)\cdot(4z^2 - 10z + 25)$

Ej.16. Factorice $\dfrac{216}{8} y^3 x^6 + \dfrac{1}{27} a^6$

Solución:

- Se escriben cada uno de los términos como un cubo:

$$\frac{216}{8} y^3 x^6 = \frac{6^3}{2^3} (y)^3 (x^2)^3 = \left(\frac{6}{2} yx^2\right)^3 = (3yx^2)^3 \quad \text{y} \quad \frac{1}{27} a^6 = \frac{1^3}{3^3} (a^2)^3 = \left(\frac{1}{3} a^2\right)^3.$$

Paso 2: Se escribe la suma de las bases: $3yx^2 + \dfrac{1}{3} a^2$. Este es uno de los factores.

Paso 3: Obtenemos el segundo factor así:

El cuadrado de la primera base $(3yx^2)^2 = 9y^2 x^4$

- El producto de las bases $3yx^2 \cdot \dfrac{1}{3} a^2 = yx^2 a^2$

+ El cuadrado de la segunda base $\left(\dfrac{1}{3} a^2\right)^2 = \dfrac{1}{9} a^4$

Paso 4: Finalmente expresa la factorización así:

Respuesta: $\dfrac{216}{8} y^3 x^6 + \dfrac{1}{27} a^6 = \left(3yx^2 + \dfrac{1}{3} a^2\right)\left(9y^2 x^4 - yx^2 a^2 + \dfrac{1}{9} a^4\right)$

<u>Ej.17.</u> Factorice la expresión $343y^6x^2 + x^2$

<u>Solución:</u>

A simple vista se nota que no es un caso de dos suma de cubos; sin embargo, observe que tiene un factor común. Veamos:

$343y^6x^2 + x^2$

$= x^2\,(343y^6 + 1)$ Factor común x^2

El factor $343y^6 + 1$ es una suma de cubos, por lo tanto se factoriza como tal.

$= x^2\,(7y^2 + 1)(49y^4 - 7y^2 + 1)$

Respuesta: $343y^6x^2 + x^2 = x^2\,(7y^2 + 1)(49y^4 - 7y^2 + 1)$

<u>5.- Trinomio Cuadrado Perfecto</u>

Este método también es conocido como Factorización de cuadrados de una suma o de una diferencia y es una expresión de la forma $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

Este método se aplica sólo cuando el polinomio es de tres (3) términos y es un trinomio cuadrado perfecto. Esta última condición se verifica cuando dos de sus términos son cuadrados perfectos: a^2 y b^2 y el término restante es igual al doble producto de a por b es decir:

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $\qquad$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto, tal como $a^2 \pm 2ab + b^2$ (el signo del segundo término depende del caso que tengamos), se siguen los siguientes pasos:

Paso 1: Ordenar el polinomio, en caso de que no lo esté. Preferiblemente de forma descendente.

Paso 2: Tanto el primer término como el último término son cuadrados perfectos y se escriben como cuadrados: $(a)^2$ y $(b)^2$.

Paso 3: El segundo término del trinomio debe ser igual al doble producto de a por b: $2ab$.

Paso 4: Luego el trinomio es igual al cuadrado de la suma de $a \pm b$. Se utiliza ± ya que el signo del binomio depende del signo que posea el segundo término del trinomio cuadrado perfecto.

Paso 5: La factorización queda expresada así: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

Veamos a continuación, los siguientes ejemplos:

<u>Ej.14.</u> Factorice la expresión $25x^4 + 9 + 30x^2$

<u>Solución:</u>

Paso 1: Se ordena el trinomio en forma descendente: $25x^4 + 30x^2 + 9$

Paso 2: Tanto el primer término como el tercer término son cuadrados perfectos, es decir : $25x^4 = (5x^2)^2$ y $9 = (3)^2$., luego $a = 5x^2$ y $b = 3$

Paso 3: El segundo término del trinomio es: $30x^2$ y se puede escribir como el doble producto del primer término por el segundo término: $30x^2 = 2 \cdot a \cdot b = 2 \cdot 15x^2 = 2 \cdot (5x^2) \cdot (3)$

Paso 4 : Se construye el binomio con la suma de $a + b$ y se eleva al cuadrado, $(5x^2 + 3)^2$. (Se suman porque el signo del segundo término del trinomio cuadrado perfecto es positivo.)

Paso 6: La factorización queda :

Respuesta $25x^4 + 30x^2 + 9 = (5x^2 + 3)^2$.

<u>**Ej.15.**</u> Factorice la expresión $\frac{x^{50}}{25} + \frac{x^{25}}{10} + \frac{1}{16}$.

<u>**Solución:**</u>

Paso 1: El polinomio está ordenado de forma decreciente : $\frac{x^{50}}{25} + \frac{x^{25}}{10} + \frac{1}{16}$

Paso 2: Tanto el primer término como el tercer término son cuadrados perfectos, es decir : $\frac{x^{50}}{25} = \left(\frac{x^{25}}{5}\right)^2$ y $\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$., luego $a = \frac{x^{25}}{5}$ y $b = \frac{1}{4}$

Paso 3: El segundo término del trinomio es: $\frac{x^{25}}{10}$ y se puede escribir como el doble producto del primer término por el segundo término: $\frac{x^{25}}{10} = 2 \cdot a \cdot b = 2 \cdot \left(\frac{x^{25}}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)$

Paso 4 : Se construye el binomio con la suma de $a + b$ y se eleva al cuadrado: $\left(\frac{x^{25}}{5} + \frac{1}{4}\right)^2$. (Se suman porque el signo del segundo término del trinomio cuadrado perfecto es positivo.)

Paso 5: **Respuesta:** $\frac{x^{50}}{25} + \frac{x^{25}}{10} + \frac{1}{16} = \left(\frac{x^{25}}{5} + \frac{1}{4}\right)^2$

Otra forma de determinar si un trinomio cuadrado es perfecto es hallar el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, de la ecuación de segundo grado $ax^2 \pm bx + c = 0$, sí este es igual a cero, entonces la factorización del trinomio es $ax^2 \pm bx + c = a\left(x \pm \frac{b}{2a}\right)^2$.

<u>Ej.16.</u> Factorice la expresión $9x^2+24x+16$

<u>Solución:</u>

Paso 1: El polinomio está ordenado de forma descendente.

<u>Ej.17.</u> **Paso 2:** Calculamos el discriminante de la ecuación $9x^2+24x+16=0$ para verificar si la expresión es un trinomio cuadrado perfecto:

$$\Delta = b^2 - 4ac\ ,$$

donde $a=9$, $b=24$ y $c=16$

$$\Delta = (24)^2 - 4\cdot 9\cdot 16$$
$$\Rightarrow \Delta = 576-576$$
$$\Rightarrow \Delta = 0$$

como el discriminante es igual a cero ($\Delta = 0$), la expresión es un trinomio cuadrado perfecto.

Paso 3 : Se construye el binomio como: $9\cdot\left(x+\frac{24}{18}\right)^2 = 9\cdot\left(x+\frac{4}{3}\right)^2$. (Se suman porque el signo del segundo término del trinomio es positivo).

Paso 4: La factorización queda :

$$9x^2+24x+16 = 9\cdot\left(x+\frac{4}{3}\right)^2 = 9\cdot\left(\frac{3x+4}{3}\right)^2 = 9\cdot\frac{(3x+4)^2}{9} = (3x+4)^2.$$

Respuesta: $9x^2+24x+16=(3x+4)^2$.

<u>Ej.18.</u> Factorice la expresión $\frac{1}{4}y^2 - x^2y + x^4$.

<u>Solución:</u>

Paso 1: El polinomio está ordenado de forma decreciente respecto a "y"

Paso 2: Calculamos el discriminante para verificar si la expresión es un trinomio cuadrado perfecto:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

donde $a=\frac{1}{4}$, $b=-x^2$ y $c=x^4$

$$\Delta = (-x^2)^2 - \cancel{4}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}\cdot x^4$$
$$\Rightarrow \Delta = x^4 - x^4$$
$$\Rightarrow \Delta = 0$$

como el discriminante es igual a cero ($\Delta=0$), entonces el polinomio es un trinomio cuadrado perfecto.

Paso 3: Se construye el binomio como:

$$a\cdot\left(y+\frac{b}{2a}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(y+\frac{-x^2}{2\left(\frac{1}{4}\right)}\right)^2=\frac{1}{4}\left(y-\frac{x^2}{\frac{1}{2}}\right)^2=\frac{1}{4}\left(y-2x^2\right)^2.$$

Respuesta: $\frac{1}{4}y^2-x^2y+x^4=\frac{1}{4}\left(y-2x^2\right)^2$

<u>Ej.19.</u> Factorice la expresión $9x^3-42x^2+49x$

<u>Solución:</u>

A simple vista no es un trinomio cuadrado perfecto, sin embargo existe un factor común entre los términos.

$$9x^3-42x^2+49x \qquad \text{Factor común } x$$
$$= x\,(9x^2-42x+49)$$

Observe que el factor $9x^2-42x+49$, es un trinomio cuadrado perfecto, por lo tanto se factoriza como tal.

Respuesta: $9x^3-42x^2+49x=x\cdot(3x-7)^2$

<u>Nota:</u>

Para que un término sea cuadrado perfecto de una expresión, todos sus factores deben serlo. Por ejemplo, $9x^3$ no es cuadrado de $3x$ ni de $3x^3$.

Fíjese que "9" es cuadrado de "3", pero "x^3" no es cuadrado exacto de la expresión; como uno de los factores no es cuadrado exacto, entonces $9x^3$ ya no es cuadrado perfecto de la expresión.

Por el contrario, note que $9x^4$ es cuadrado exacto de $3x^2$, ya que 9 es el cuadrado de 3 y x^4 lo es de x^2.

Observemos que en algunos de los ejemplos vistos, hemos factorizado primero por factor común antes de usar el método de factorización que se está aprendiendo con el ejemplo. Con esto se quiere dar a entender que para factorizar completamente una expresión a veces se pueden aplicar varios métodos de factorización sucesivamente.

<u>*6.- Factorización de un Trinomio de 2do. Grado*</u>

Existen varias formas de factorizar trinomios de segundo grado, una de ellas ya la estudiamos en el apartado anterior, que tratan específicamente trinomios cuadrados perfectos.

En este apartado desarrollaremos otras formas de factorizar trinomios: Resolvente y Producto de dos binomios (Tanteo). Es importante hacer notar que estos métodos sirven para factorizar cualquier tipo de trinomio, perfecto o no, sin embargo en este apartado haremos mayor hincapié en la factorización de trinomios cuadrados no perfectos.

Para saber si un trinomio cuadrado no perfecto es factorizable con raíces reales, basta con verificar que el discriminante es mayor que cero ($\Delta > 0$, vea la sección 7.1. de Expresiones Algebraicas y Polinomios).

6.A. .-Método de la Resolvente

Para factorizar un trinomio con este método seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1: Se verifica si el trinomio es factorizable, para eso buscamos el discriminante. Si $\Delta \geq 0$, la expresión es factorizable.

Paso 2: Si es factorizable se encuentran las raíces x_1= m y x_2= n (m y n pertenecen a los reales), usando la resolvente $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, en donde "a", "b" y "c" son los coeficientes de "x^2", "x" y el "término independiente", respectivamente.

Paso 3: Se escriben dos binomios con las raíces encontradas en el paso 2, como sigue: x –m y x – n.

Paso 4: Los binomios hallados en el paso anterior se multiplican (x - m).(x - n)

Paso 5: La factorización queda así: $ax^2 + bx + c = a(x - \text{m})\cdot(x - \text{n})$

Veamos a continuación los siguientes ejemplos.

Ej.20. Factorice la expresión $x^2 + 2x - 3$.

Solución:

Paso 1: Verificamos si la expresión es factorizable.

$$\Delta = b^2 - 4ac \text{, donde } a = 1 \quad b = 2 \quad y \quad c = -3$$

$$\Rightarrow \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) \qquad \Rightarrow \Delta = 4 + 12 \qquad \Rightarrow \Delta = 16$$

Como $\Delta > 0$, entonces la expresión es factorizable y es trinomio cuadrado no perfecto.

Paso 2: Buscamos las raíces con la resolvente

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}, \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}, \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{-2+4}{2} \quad \Rightarrow x = 1 \\[2ex] x = \dfrac{-2-4}{2} \quad \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

Paso 3: Se escribe los binomios con las raíces obtenidas:

La raíz $x = 1$, implica el binomio $x - 1 = 0$

La raíz $x = -3$, implica el binomio $x + 3 = 0$

(Se despeja)

Paso 4: Se multiplican los binomios: $(x - 1) \cdot (x + 3)$

Paso 5: **Respuesta**: $x^2 + 2x - 3 = (x - 1) \cdot (x + 3)$

<u>Ej.21.</u> Factorice la expresión $25w^2 + 15w - 4$

<u>Solución:</u>

Paso 1 y 2: La expresión $25w^2+15w-4$ es un trinomio cuadrado no perfecto, ya que $\Delta > 0$, por lo tanto se encuentran las raíces $w = \frac{1}{5}$ y $w = -\frac{4}{5}$ usando la resolvente y se escriben los binomios $\left(w - \frac{1}{5}\right)$ y $\left(w + \frac{4}{5}\right)$.

Paso 3 y 4: Multiplicando los binomios encontrados y el coeficiente $a = 25$, se obtiene:

$$25w^2 + 15w - 4 = 25\left(w - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(w + \frac{4}{5}\right)$$

$$= 25\left(\frac{5w-1}{5}\right) \cdot \left(\frac{5w+4}{5}\right)$$

(Suma de fracciones en cada binomio.)

.

$$= (5w-1) \cdot (5w+4)$$

(Se extrae factor común $\frac{1}{25}$, y se simplifica)

Paso 5: Entonces **Respuesta**: $25w^2 + 15w - 4 = (5w-1)(5w+4)$

Recuerde que si usted desea comprobar la factorización, solo debe desarrollar el producto notable.

Ej.22. Factorice la expresión $9x^3 - 42x^2 + 49x$

Solución:

A simple vista no es un trinomio cuadrado perfecto, sin embargo existe la presencia de factor común entre los términos.

$9x^3 - 42x^2 + 49x$ (Factor común x)

$= x\,(9x^2 - 42x + 49)$ (Es factorizable, ya que $\Delta = 0$)

Observe que el factor $9x^2 - 42x + 49$ es un trinomio cuadrado perfecto, y fue resuelto en el ejemplo 19 de ésta sección, pero en esta oportunidad utilizaremos el método de la resolvente para factorizar la expresión.

- Buscamos las raíces de $9x^2 - 42x + 49$ aplicando la resolvente

Sabemos que $a = 9$, $b = -42$ y $c = 49$,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-42) \pm \sqrt{(-42)^2 - 4(9)(49)}}{2(9)}$$

$$x = \frac{42 \pm \sqrt{0}}{18} \Rightarrow x = \frac{42}{18} \Rightarrow x = \frac{7}{3}$$

Los valores de x que se encuentran al aplicar la resolvente, representan las raíces o soluciones del polinomio. Por otro lado, toda ecuación de grado dos, tiene máximo dos soluciones.

En este caso la solución es única, lo que significa que la raíz es doble. Por lo tanto el factor $x - \frac{7}{3}$ se repite dos veces.

Cuando se factoriza aplicando la resolvente, se multiplican los factores por el valor de "*a*" para que quede correctamente factorizado, entonces la expresión $9x^2 - 42x + 49$ queda expresada de la siguiente manera:

$$9x^2 - 42x + 49 = 9\left(x - \frac{7}{3}\right)\left(x - \frac{7}{3}\right) = 9\left(x - \frac{7}{3}\right)^2$$

(Multiplicación de potencias de igual base)

Como el ejercicio inicialmente es $9x^3 - 42x^2 + 49x$, finalmente la factorización de esta expresión queda así:

$9x^3 - 42x^2 + 49x$ — Factor común x

$= x\,(9x^2 - 42x + 49)$ — Factorización de $9x^2 - 42x + 49$, utilizando la resolvente.

$= 9x\left(x - \frac{7}{3}\right)^2$

Respuesta: $9x^3 - 42x^2 + 49x = \; = 9x\left(x - \frac{7}{3}\right)^2$

Compruebe que: $9x\left(x - \frac{7}{3}\right)^2 = x(3x-7)^2$.

6.B.-Producto de dos Binomios

Uno de los casos en productos notables de dos binomios que tienen un término común es: $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + a \cdot b$. Observa que el coeficiente de x^2 es 1 , el coeficiente de x es $(a+b)$, que es la suma algebraica de los términos no comunes y el término independiente es $a \cdot b$, que es el producto de los términos no comunes.

Para estudiar este método utilicemos el siguiente ejemplo:

Ej.23. Factorice la expresión $x^2 + 2x - 3$.

Solución: $x^2 + 2x - 3$

- En el polinomio el coeficiente de x^2 es 1
- Observamos que el coeficiente de x es 2, entonces $a + b = 2$ y
- Y el término independiente es -3, es decir $a \cdot b = -3$

Entonces estamos buscando dos números que :

Sumados den +2 y multiplicados den -3

Estos números son: 3 y - 1, entonces $a = 3$ y $b = -1$

Luego **Respuesta:** $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$

Ej.24. Factorice la expresión $x^2 + 11x + 30$

Solución: $x^2 + 11x + 30$

- En el polinomio el coeficiente de x^2 es 1
- Observamos que el coeficiente de x es 11 entonces $a + b = 11$ y
- Y el término independiente es 30, es decir $a \cdot b = 30$

Entonces estamos buscando dos números que :

Sumados den +11 multiplicados den +30

Estos números son: 6 y 5 entonces $a = 6$ y $b = 5$

Luego **Respuesta:** $x^2 + 11x + 30 = (x + 6)(x + 5)$

<u>Ej.25.</u> Factorice la expresión $x^2 + x - 30$

<u>Solución</u>: $x^2 + x - 30$

- En el polinomio el coeficiente de x^2 es 1
- Observamos que el coeficiente de x es 1 entonces $a + b = 1$ y
- El término independiente es -30, es decir $a \cdot b = -30$

Entonces estamos buscando dos números que :

Sumados den +1 multiplicados den -30

Estos números son: 6 y -5 entonces $a = 6$ y $b = -5$

Luego **Respuesta:** $x^2 + x - 30 = (x + 6)(x - 5)$

<u>Ej.26.</u> Factorice la expresión $2x^2 + 5x - 3$.

<u>Solución:</u>

El coeficiente de x^2 es 2, luego multiplicamos y dividimos la expresión $2x^2+5x-3$ por 2

$$2 \cdot \left(\frac{2x^2 + 5x - 3}{2} \right) = \frac{(2) \cdot 2x^2 + (2) \cdot 5x - (2) \cdot 3}{2} = \frac{(2x)^2 + 5 \cdot (2x) - 6}{2}$$

Trabajamos con el numerador :

Encontrar dos números que sumados den +5 y multiplicados den - 6 , éstos números son: 6 y -1

Construir dos binomios con el factor $2x$ y cada uno de los números encontrados anteriormente 6 y -1. Estos binomios son: $(2x + 6)$ y $(2x - 1)$.

Escribimos la expresión $(2x)^2 + 5 \cdot (2x) - 6$ como el producto de los factores $(2x + 6) \cdot (2x - 1)$, entonces: $\dfrac{(2x)^2 + (2) \cdot 5x - 6}{2} = \dfrac{(2x + 6) \cdot (2x - 1)}{2}$

Podemos extraer de uno de los factores el 2 como factor común, de tal manera que se pueda simplificar el denominador:

$$= \frac{\cancel{2} \cdot (x + 3) \cdot (2x - 1)}{\cancel{2}} = (x + 6). (2x - 1)$$

Respuesta: $2x^2 + 5x - 3 = (x + 3). (2x - 1)$

Ej.27. Factorice $15x^2 + 7x - 8$

Solución:

$$15x^2 + 7x - 8 = \frac{(15x)^2 + 7\cdot(15x) - 8\cdot(15)}{15}$$

$$= \frac{(15x)^2 + 7\cdot(15x) - 120}{15}$$

Multiplicamos y dividimos por 15

Hallamos dos números que sumados nos den +7 y multiplicado den –120, éstos números son –8 y +15. Luego construimos los dos binomios con el factor $15x$ y cada uno de los números encontrados anteriormente, -8 y +15. Estos binomios son: ($15x$ -8) y ($15x$ +15).

$$15x^2 + 7x - 8 = \frac{(15x-8)\cdot(15x+15)}{15}$$

$$= \frac{(15x-8)\cdot\cancel{15}(x+1)}{\cancel{15}}$$

$$= (15x-8)(x+1)$$

Extraemos 15 como factor común

Respuesta: $15x^2 + 7x - 8 = (15x - 8)(x + 1)$

7.-Método de Ruffini

Este método sirve para factorizar polinomios de cualquier grado. Generalmente se recomienda usarlo para los polinomios de grado igual o mayor a tres (3). Para explicarlo comencemos con un ejemplo sencillo, pues el procedimiento se clarifica al seguirlo paso a paso.

Ej.28. Factorice la expresión $3x^2 - 16x - 12$

Solución:

Paso 1: El polinomio debe ser completo y ordenado en forma decreciente.

$$3x^2 - 16x - 12$$

Paso 2: Debemos encontrar las posibles raíces racionales del polinomio. Para ello, buscamos los divisores del coeficiente del término con mayor exponente, en nuestro caso este términos es $3x^2$ y por lo tanto el coeficiente es 3 y sus divisores ±1; ±3.

Buscamos los divisores del término independiente, que en nuestro caso es 12 y sus divisores son ±1; ±2; ±3; ±4; ±6;±12.

Finalmente para encontrar las posibles raíces racionales del polinomio, se divide cada divisor del término independiente entre cada divisor del coeficiente del término de mayor exponente, estas raíces son: ±1; ±1/3; ±2; ±2/3; ±3; ±4; ±4/3; ±6; ±12.

Paso 3: Ahora escribimos los coeficientes de cada término en el mismo orden del paso 1, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c|ccc} & 3 & -16 & -12 \\ \hline & & & \end{array}$$

Paso 4: De ahora en adelante se procede a trabajar con las raíces, como podemos observar, colocando la “posible” raíz. Intentamos para $x = 6$

Sumamos cero al primer coeficiente. Luego sumamos de forma vertical y colocamos el resultado en su lugar.

$$\begin{array}{c|ccc} & 3 & -16 & -12 \\ 6 & 0 & & \\ \hline & 3 & & \end{array}$$

Multiplicamos por la posible raíz el resultado de la suma ($6 \cdot 3 = 18$) y escribimos el producto bajo el -16 y resolvemos esta suma vertical.

$$\begin{array}{c|ccc} & 3 & -16 & -12 \\ 6 & 0 & 18 & \\ \hline & 3 & 2 & \end{array}$$

El resultado 2 lo multiplicamos por la raíz 6, entonces $6 \cdot 2 = 12$, el cual lo colocamos bajo el 12 y resolvemos esta suma vertical.

$$\begin{array}{c|cc|c} & 3 & -16 & -12 \\ 6 & 0 & 18 & 12 \\ \hline & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

Nota:

Observe que se repite el mismo proceso hasta que la última suma algebraica vertical dé cómo resultado cero. Si esto no sucede, entonces el número elegido no es raíz. Siempre debe probar hasta encontrar la raíz adecuada.

Luego como al tomar $x=6$, la última suma fue igual a cero, entonces $x-6=0$ Esto significa que se ha hallado uno de los factores de la expresión y éste es $(x-6)$.

Hasta ahora hemos encontrado un factor $x-6$ y la factorización parcial es $(x-6).(3x+2)$. Aún no hemos terminado de factorizar, nos queda la expresión $3x+2$ por factorizar. Utilicemos otra de las posibles raíces del polinomio para seguir el proceso de Factorización por Ruffini.

Probamos con la posible raíz $x = -2/3$

	3	-16	-12
6	0	18	12
	3	2	0
-2/3	0	-2	
	3	0	

Finalmente la expresión $3x^2 - 16x - 12$, queda factorizada así:

$$3x^2 - 16x - 12 = 3\cdot(x-6)\cdot(x+2/3)$$

Multiplicación de los factores encontrados y el valor del coeficiente de la mayor potencia, $a = 3$.

$$= (x-6)\cdot(3x+2)$$

Suma de fracciones y simplificación.

Respuesta: $3x^2 - 16x - 12 = (x-6).(3x+2)$

<u>Ej.29.</u> Factorice la expresión $2x^5 + 7x^4 - 18x^2 - 8x + 8$

<u>Solución:</u>

Paso 1: El polinomio debe estar completo y ordenado en forma decreciente. En éste caso se debe completar el polinomio, de esta forma nos queda:

$$2x^5 + 7x^4 + 0x^3 - 18x^2 - 8x + 8.$$

Paso 2: las posibles raíces son: ± 1; $\pm 1/2$; ± 2; ± 4; ± 8.

Paso 3: Ahora escribimos los coeficientes de cada término en el mismo orden del paso1, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 2 & 7 & 0 & -18 & -8 & 8 \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

Paso 4: De ahora en adelante se procede a trabajar con las raíces.

Intentamos con $x = -\frac{1}{2}$

Sumamos cero al primer coeficiente. Luego sumamos de forma vertical y colocamos el resultado en su lugar.

$$\begin{array}{c|cccccc} & 2 & 7 & 0 & -18 & -8 & 8 \\ \frac{1}{2} & 0 & & & & & \\ \hline & 2 & & & & & \end{array}$$

Multiplicamos por la posible raíz el resultado $\left(\frac{1}{2} \cdot 2 = 1\right)$ y escribimos el producto bajo el 7 y resolvemos esta suma vertical.

$$\begin{array}{c|cccccc} & 2 & 7 & 0 & -18 & -8 & 8 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & & & & \\ \hline & 2 & 8 & & & & \end{array}$$

El resultado 8 lo multiplicamos por la raíz ½, entonces ½.(8) = 4, el cual lo colocamos bajo el 0 y resolvemos esta suma vertical.

$$\begin{array}{c|cccccc} & 2 & 7 & 0 & -18 & -8 & 8 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 4 & & & \\ \hline & 2 & 8 & 4 & & & \end{array}$$

El resultado, 4, lo multiplicamos por la raíz ½, entonces ½.(4)=2, el cual lo colocamos bajo el -18 y resolvemos esta suma vertical.

	2	7	0	-18	-8	8
½	0	1	4	2		
	2	8	4	-16		

El resultado -16 lo multiplicamos por la raíz ½, entonces ½.(-16)= -8, el cual lo colocamos bajo el -8 y resolvemos esta suma vertical.

	2	7	0	-18	-8	8
½	0	1	4	2	-8	
	2	8	4	-16	-16	

El resultado -16 lo multiplicamos por la raíz ½, entonces ½.(-16)= -8, el cual lo colocamos bajo el 8 y resolvemos esta suma vertical.

	2	7	0	-18	-8	8
½	0	1	4	2	-8	-8
	2	8	4	-16	-16	0

Muy bien hemos encontrado un factor $x-\frac{1}{2}$ y la Factorización parcial es:

$$(x-\frac{1}{2}).(2x^4+8x^3+4x^2-16x-16).$$

Debemos factorizar la expresión $2x^4+8x^3+4x^2-16x-16$. Utilicemos otra de las posibles raíces del polinomio para seguir el proceso de factorización por Ruffini.

Probamos con la posible raíz x = -2

	2	7	0	-18	-8	8
½	0	1	4	2	-8	-8
	2	8	4	-16	-16	0
-2	0	-4	-8	8	16	
	2	4	-4	-8	0	

Acabamos de obtener otro factor $x+2$. Probamos nuevamente con $x = -2$

	2	7	0	-18	-8	8
½	0	1	4	2	-8	-8
	2	8	4	-16	-16	0
-2	0	-4	-8	8	16	
	2	4	-4	-8	0	
-2	0	-4	0	8		
	2	0	-4	0		

Observamos que encontramos el factor $x + 2$ repetido dos veces.

Por otro lado fíjese en que 2, 0, - 4 son los coeficientes de un polinomio de segundo grado, por lo tanto lo escribimos como tal ($2x^2 + 0x - 4 = 2x^2 - 4$), y factorizamos por cualquiera de los métodos que conocemos y queda de la forma: $2x^2 - 4 = 2(x^2 - 2) = 2\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$.

Finalmente la expresión $2x^5 + 7x^4 - 18x^2 - 8x + 8$, queda factorizada así:

$2x^5 + 7x^4 - 18x^2 - 8x + 8 \quad = (x-1/2)(x+2)(x+2).\ 2.\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$

Respuesta: $2x^5+7x^4-18x^2-8x+8 = 2(x-1/2)(x+2)^2\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$

<u>Ej.30.</u> Factorice la expresión $x^4 + x^3 - x - 1$.

<u>Solución:</u>

Paso 1: El polinomio debe estar completo y ordenado en forma decreciente. En éste caso se debe completar el polinomio, de esta forma nos queda:

$$x^4 + x^3 + 0x^2 - x - 1.$$

Paso 2: las posibles raíces son: ± 1

Ahora ubiquemos los coeficientes en la galera y probemos con las posibles raíces.

	1	1	0	-1	-1
1	0	1	2	2	1
	1	2	2	1	0
-1	0	-1	-1	-1	
	1	1	1	0	

Se ha probado con las dos raíces posibles y hasta ahora los factores encontrados son x-1 y x +1. Aunque repitamos las raíces $x = \pm 1$, ya no es posible factorizar (con raíces reales) por el método de Ruffini la expresión $x^2 + x + 1$. Si intentamos factorizar esta última expresión por cualquier otro método nos daremos cuenta que no es posible, sobre el conjunto de números reales. Entonces la factorización del polinomio dado inicialmente queda: $x^4 + x^3 - x - 1 = (x - 1).(x + 1).(x^2 + x + 1)$

Respuesta: $x^4 + x^3 - x - 1 = (x - 1).(x + 1).(x^2 + x + 1)$

8.-Agrupación de Términos

Este método consiste en agrupar términos que contengan factores comunes, hasta que la expresión quede totalmente factorizada. Este método solo puede ser aplicado a polinomios que tenga un número par de términos mayores o igual a cuatro y que existan factores comunes entre los términos. Veamos algunos ejemplos:

Ej.31. Factorice 3x +7y – 28yc – 12cx

Solución:

$3x + 7y - 28yc - 12cx = (3x - 12cx) + (7y - 28yc)$ (Agrupamos los términos que tienen factor común)

Se extrae el factor común de cada agrupación de términos. Observe que al hacer esto los otros factores quedan exactamente iguales. Ésta justamente es la intención, para luego volver a factorizar por factor común.

$= 3x(1 - 4c) + 7y\,(1-4c)$

$= (1 - 4c)\,(3x + 7y)$ (Factor común (1- 4c))

Respuesta: $3x + 7y - 28yc - 12cx = (1 - 4c)\,(3x + 7y)$

Nota:

Observe que se factoriza por factor común dos veces. Se deben agrupar de tal manera que exista un factor común en ambas oportunidades.

Ej.32. Factorice $x^5 - 16xy^4 - 2x^4y^2 + 32y^6$

Solución:

$x^5 - 16xy^4 - 2x^4y^2 + 32y^6$

$= (x^5 - 16xy^4) - (2x^4y^2 - 32y^6)$ (Agrupación de términos que tienen un factor común.)

$= x\left(x^4 - 16y^4\right) - 2y^2\left(x^4 - 16y^4\right)$ — Factor común en cada agrupación

$= (x^4 - 16y^4)(x - 2y^2)$ — Factor común $(x^4 - 16y^4)$

$= (x^2 - 4y^2)(x^2 + 4y^2)(x - 2y^2)$ — Factorización por diferencia de cuadrados de $(x^4 - 16y^4)$

En el ejercicio anterior se utilizaron dos formas de factorización sucesivas para factorizar completamente la expresión.

9.-Ejercicios Propuestos:

Factorizar las siguientes expresiones:

1) $4x^2 - 9$	R: $(2x + 3)(2x - 3)$
2) $a^2 - 121b^2$	R: $(a + 11b)(a - 11b)$
3) $x^3 + 64$	R: $(x + 4)(x^2 - 4x + 16)$
4) $125x^3 - 64$	R: $(5x - 4)(25x^2 + 20x + 16)$
5) $8x^3 + 343y^3$	R: $(2x + 7y)(4x^2 - 14xy + 49y^2)$
6) $3 - 4x^2$	R: $\left(\sqrt{3} + 2x\right)\left(\sqrt{3} - 2x\right)$
7) $x - 36$	R: $\left(\sqrt{x} + 6\right)\left(\sqrt{x} - 6\right)$
8) $7x^3 + 7h^3$	R: $7(x + h)(x^2 - hx + h^2)$
9) $a^8 - b^8$	R: $(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$
10) $a^5 - 32$	R: $(a - 2)(a^4 + 2a^3 + 4a^2 + 8a + 16)$
11) $a^3x - b^3y + b^3x - a^3y$	R: $(x - y)(a + b)(a^2 - ab + b^2)$
12) $x^5 - 16xy^4 - 2x^4y + 32y^5$	R: $(x^2 + 4y^2)(x + 2y)(x - 2y)^2$
13) $20a^2 - 9a + 1$	R: $(5a - 1)(4a - 1)$
14) $9x^2 + 6x + 1$	R: $(3x + 1)^2$
15) $14x^2 + 37x + 5$	R: $(7x + 1)(2x + 5)$
16) $8x^2 - 9x + 1$	R: $(8x - 1)(x - 1)$

17) $8x^2 - 16x + 6$ — R: $2.(2x - 3)(2x - 1)$

18) $12a^2 - 25a + 12$ — R: $(4a - 3)(3a - 4)$

19) $4x^2 + 4x - 3$ — R: $(2x - 1)(2x + 3)$

20) $24a^2 + 25ab + 6b^2$ — R: $(8a + 3b)(3a + 2b)$

21) $a^2 - 2a + 2$ — R: No es factorizable

22) $6x^2 + 2x - 20$ — R: $2(3x - 5)(x + 2)$

23) $2b^2 + 12b + 16$ — R: $2(b + 2)(b + 4)$

24) $a^3b - 2a^2b^2 + ab^3$ — R: $a.b(a - b)^2$

25) $16x^2 - 24x + 8$ — R: $8(2x - 1)(x - 1)$

26) $25a^2 + 50ab + 25b^2$ — R: $25(a + b)^2$

27) $a^6 - 2a^3 + 1$ — R: $(a - 1)^2(a^2 + a + 1)^2$

28) $6x^5y - 3x^3y^2 - 30xy^3$ — R: $3xy(x^2 + 2y)(2x^2 - 5y)$

29) $(x + 2)^3(2) + (2x + 1)(3)(x + 2)^2$ — R: $(x + 2)^2(8x + 7)$

30) $(x^3 + 1)^3(2x) + (x^2 - 1)(3)(x^3 + 1)^2(3x^2)$ — R: $x(x+1)^3(x^2 - x + 1)^2(11x^2 - 11x + 2)$

31) $x^4 - 13x^2 + 36$ — R: $(x-2).(x+2).(x-3).(x+3)$

32) $2x^6 - 8x^5 - 10x^4 + 72x^3 - 72x^2$ — R: $2x^2.(x-2)^2.(x-3).(x+3)$

33) $6x^5 + 7x^4 - 13x^3 - 4x^2 + 4x$ — R: $6x.(x-1).(x+2).(x - 1/2).(x + 2/3)$

34) $36x^5 + 36x^4 - 25x^3 - 25x^2 + 4x + 4$ — $R: (x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)$

35) $16x^5 + 15x^3 - x$ — R: $16x(x - \frac{1}{4}).(x + \frac{1}{4}).(x^2 + 1)$