República Bolivariana de Venezuela

Ministerio de la Defensa

Universidad Nacional Experimental Politécnica de la Fuerza Armada

Núcleo Caracas

Curso de Inducción Universitaria CIU

Cátedra: ***Razonamiento Matemático***

EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y POLINOMIOS

GUIA CIU NRO: 5

COMISIÓN DE APOYO A RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Integrado por:

Ing. Beliana Gómez
Ing. Elvia Moreno
Ing. Mixef Rojas
Lic. Teresa Gómez
Prof. Neida González

1.- Definiciones:

Expresiones Algebraicas: Es la combinación de constantes, variables y signos de operación que, entre otras cosas, pueden definir una regla o principio general. Así, una expresión algebraica puede ser:

a) $-8x^5$ b) ay^2+3y+9 c) $\frac{x}{y+1}+\frac{3y+8}{x+6}$ d) $(2x+b)(y-b)$

e) $\sqrt{7\cdot(x+1)}+8x^3$

I. **Términos:** Es una expresión algebraica, donde interviene sólo los signos de multiplicación, división potenciación y radicación. Así, para los ejemplos anteriores tenemos:

El ejemplo (a) tiene un solo término, $-8x^5$

El ejemplo (b) tiene tres términos: ay^2, $3y$, 9

El ejemplo (c) tiene dos términos : $\frac{x}{y+1}$, $\frac{3y+8}{x+6}$

El ejemplo (d) tiene un término: $c\,(2x+b)(y-b)$ (*)

El ejemplo (e) tiene dos términos: $a\sqrt{(x+1)}$, $8x^3$

> *(*) La expresión $c\,(2x+b)(y-b)$ así como está, sin resolver tiene un término, mientras que si aplicamos la propiedad distributiva obtenemos:*
> $c\,(2x+b)(y-b)=c(2xy-2xb+yb-b^2)=2xyc-2xbc+ybc-cb^2$ *y esta expresión tiene 4 términos.*

Elementos de un término:

- **El signo**: Es el signo que precede al término, puede ser positivo (+) ó negativo (-), si éste no aparece, el signo del término es positivo.
- **Variable** de un término es aquella sobre la cual se define el término o expresión algebraica e indica que su valor va variando. Por lo general se toman

las últimas letras del alfabeto en minúsculas: $x, y, z, w, etc.$. Las expresiones algebraicas pueden ser de una, dos o varias variables.

- **Coeficiente**: Es el factor que acompaña a la parte variable, e indica que su valor no cambia, es constante. Por lo general los coeficientes se representan con las primeras letras del alfabeto en minúscula: $a, b, c, d, etc.$

Así para los ejemplos anteriores, las variables y los coeficientes son:

El ejemplo (a) $-8x^5$ es de una sola variable: *x*, el coeficiente es 8.

El ejemplo (b) $ay^2 + 3y + 9$ es de una variable: *y*, los coeficientes son : a, 3 y 9.

El ejemplo (c) $\frac{x}{y+1} + \frac{3y+8}{x+6}$ es de dos variables y ambos coeficientes son uno (1).

El ejemplo (d) $c(2x+b)(y-b)$ es de dos variables: x , *y*, el coeficiente es *c*

El ejemplo (e) $a\sqrt{(x+1)} + 8x^3$, es de una variable: x , los coeficientes son *a* y 8.

2.- Términos Semejantes:

Son términos cuya parte variable son iguales y además tienen el mismo exponente. Observe los siguientes ejemplos:

a) $3x^2, \ 5x^2, \ \frac{1}{2}x^2, \ -4x^2$ — Son términos semejantes ya que todos contienen x^2

b) $3xy, \ 2xy, \ \frac{-3}{4}xy$ — Son términos semejantes ya que todos contienen xy

c) $x^2y, \ -2x^2y, \ \frac{-1}{2}x^2y$ — Son términos semejantes ya que todos contienen x^2y

d) $x^2y, \ 3xy^2$ — No son términos semejantes ya que $x^2y \neq xy^2$

e) $\dfrac{4x^2 y}{x+y}, \ \dfrac{3x^2 y}{x+y}$

Son términos semejantes ya que todos contienen $\dfrac{x^2 y}{x+y}$

f) $a\sqrt{3x+9}, 5\sqrt{3x+9}$

Son términos semejantes ya que todos contienen $\sqrt{3x+9}$

La importancia de los términos semejantes radica en que pueden sumarse (o restarse) y, por consiguiente reducir una expresión algebraica. Si dos o más términos no son semejantes, éstos **no pueden** sumarse ni restarse.

Ej. 1 $P(x) = x^2 - 2x^2 + 5x^2$. Reducir la siguiente expresión algebraica, agrupando términos semejantes.

Solución:

$$P(x) = x^2 - 2x^2 + 5x^2$$

$$P(x) = (1 - 2 + 5)x^2$$

$$P(x) = 4x^2$$

Son términos semejantes ya que todos contienen x^2, se suman los coeficientes y se coloca una vez el factor que se repite

Respuesta: $P(x) = 4x^2$

Ej. 2 $P(y) = 3x^2 y - \dfrac{1}{2}x^2 y + 2x^2 y$. Reducir la siguiente expresión algebraica, agrupando términos semejantes.

Solución:

$$P(y) = \left(3 - \frac{1}{2} + 2\right) x^2 y$$

$$P(y) = \frac{9}{2}x^2 y$$

Son términos semejantes ya que todos contienen $x^2 y$, se suman los coeficientes y se coloca una vez el factor que se repite

Respuesta: $P(y) = \dfrac{9}{21}x^2 y$

Ej. 3 $P(x) = 5x^2 - xy + 2xy - 3x^2$. Reducir la siguiente expresión algebraica, agrupando términos semejantes.

Solución:

Son semejantes por grupos. Si agrupamos tendremos:

$$P(x)=(5x-3x)+(-xy+2xy)$$

$$P(x)=(5-3)x+(-1+2)xy$$

$$P(x)=2x^2+xy$$

Respuesta: $P(x)=2x^2+xy$

3.- Valor numérico de una expresión algebraica:

Es el número real que resulta de reemplazarlas variables por números determinados en la expresión algebraica.

Ej. 4 Sea $Q(y)=y^5-3y^4+5y^3+7y^2-5y+4$, hallar el valor numérico de *Q(y)* para $y=-1$.

Solución:

Sustituimos el valor de $y=-1$ en la expresión *Q(y)*, es decir hallamos

$$Q(-1)=(-1)^5-3(-1)^4+5(-1)^3+7(-1)^2-5(-1)+4$$
$$=-1-3(1)+5(-1)+7(1)-5(-1)+4=-1-3-5+7+5+4$$
$$=-9+16=7$$

Respuesta: $Q(-1)=7$

Ej. 5 Sea $P(x,y)=\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-2xy+y^2}$, hallar el valor numérico de *P(x,y)* para *x=3* , *y=2*.

Solución:

Sustituimos los valores de $x=3$,$y=2$ en la expresión *P(x,y)*, es decir hallamos

$$P(3,2)=\frac{3^2+2\cdot3\cdot2+2^2}{3^2-2\cdot3\cdot2+2^2}=\frac{9+12+4}{9-12+4}=\frac{25}{1}=25$$

Respuesta: $P(3,2)=25$

4.- Clasificación de las expresiones algebraicas

I.- **Según su tipo** podemos clasificar las expresiones algebraicas:

Enteras: Es toda expresión algebraica en la que las operaciones matemáticas de que se componen **las variables** son suma, resta, multiplicación y potenciación con exponente natural.

Ejemplos: $3x^2 + \ 5y^3, \ 4x^2y, \ \frac{2}{3}(z+x)^3 b$

Racionales : Es el cociente de dos expresiones algebraicas enteras, donde el denominador es diferente de cero.

Ejemplos: $\frac{3x^5+5x^3+9}{2x^2}, \ \frac{5y^3}{7xy+y^2}, \ \frac{4x^2+y}{5y+x}$

Radicales: Son expresiones algebraicas donde **las variables** esta dentro de una raíz.

Ejemplos: $\sqrt[5]{3x^2+2x}, \ 5\sqrt[3]{y^2+3}, \ \sqrt{\frac{2}{3}z^2+y}$

Combinadas: Son expresiones algebraicas que contiene expresiones enteras, racionales y/o radicales.

Ejemplos: $x^2+\frac{3x^3+5}{\sqrt{2x+1}}, \ \sqrt[4]{y^2+3}+\frac{5x}{1-x}, \ \frac{4x^3-3x^2+1}{x+3}+x^3-4y^2+5$

> ***Nota:*** *Las operaciones básicas sobre expresiones racionales se estudiarán después del objetivo de Factorización y las expresiones radicales se estudiarán en el objetivo Radicación.*

Seguimos con la clasificación de las expresiones algebraicas.

II.- **Según el número de términos** podemos clasificar las expresiones **algebraicas enteras**(donde el exponente de las variables son enteros positivos), de la siguiente forma:

Monomio: Expresión que consta de un solo término.

Ejemplos: $3x^2, \ 5y^3, \ 4x^2y, \ \frac{2}{3}a^2b$

Binomio: Expresión que consta de dos términos.

Ejemplos: $(x-3y)$, $(2x^2-4y^3)$, $\left(\frac{1}{2}a^2b+2b^5\right)$

Trinomio: Expresión que consta de tres términos.

Ejemplos:

$$\left(x^2-3x+2\right) \quad , \quad \left(5y^2+2y-1/2\right) \quad , \quad \left(\frac{1}{2}xy-3x+2y^2\right)$$

Asi, en general podemos definir:

Polinomio: Es una expresión algebraica que consta de más de un término, como:

$b+x-4y$, $\quad x^3+6x^2-9x+6$, $\quad x^2-2x+1$

> **NOTA:** *Observe que de acuerdo a la definición de polinomio, los binomios y los trinomios son polinomios.*

POLINOMIOS DE UNA VARIABLE

5.- Características de los polinomios de una variable:

i) Grado de un Polinomio: Se define como el *mayor exponente* que tiene la variable del polinomio.

ii) Coeficientes de un polinomio: Se definen como los factores que acompañan a la parte variable de cada término del polinomio. Así, para el polinomio P(*a*) = $3a^4-2a^3+4a^2-7a+1$ **,** los coeficientes del polinomio P, con respecto a la variable *a* son : 3, -2, 4, -7, 1.

Para el polinomio Q(*x*) = $5ax^3+8bx^2+ab$**,** los coeficientes del polinomio Q con respecto a la variable *x* son: 5*a*, 8*b*, 0, *ab*. Note que el polinomio Q no tiene término con *x* de exponente 1,esto significa que el coeficiente del término *x*, es igual a cero, es decir el polinomio se puede escribir en forma ordenada descendente así: Q(*x*) = $5ax^3+8bx^2+0x+ab$.

iii) Término Independiente: Es el término del polinomio que no está acompañado de la variable. Así, para el polinomio Q(x) = $5ax^3 + 8bx^2 + ab$**,** el término independiente del polinomio Q es el término ab.

iv) Polinomio Completo: Es aquel polinomio que con relación a la parte variable contiene todos los exponentes sucesivos de la misma, desde el más alto hasta el más bajo. Así, el polinomio : P(x)= $x^5 - 5x^4 + 3x^3 + x^2 - x + 6$ es completo con respecto a su parte variable x, porque contiene todos los exponentes sucesivos de la variable x desde el más alto, 5, hasta el más bajo, 0. ($6 = 6x^0$).

El polinomio Q(a)= $a^3 + a^2b - 2ab^2 + b^3$ ***es un polinomio completo*** con respecto a su parte variable a. Note que si definimos como variable del polinomio Q a b, Q(b) = $a^3 + a^2b - 2ab^2 + b^3$, éste también ***es un polinomio completo***.

El polinomio R(x) = $x^4 - 3x^3 + 2x + 6$ ***no es un polinomio completo***, ya que el término x^2 no está en el polinomio, es decir el coeficiente de x^2 es cero.

<u>NOTA:</u> *Podremos decir entonces que un polinomio es completo, si todos los coeficientes del polinomio son diferentes de cero.*

v) Polinomio ordenando o en su forma estándar: Diremos que un polinomio está ordenado si sus términos están ordenados de tal modo que los exponentes de la variable queden en orden ascendente o descendente.

Así por ejemplo:

- El polinomio P(x) = $x^3 - 4x^2 - 3x + 12$ es un polinomio ordenando en forma descendente,
- El polinomio Q(x) = $3x^4 - 3x^3 + 5x^6 + 4x^5 - 3x + 1$ es un polinomio no ordenado.
- El polinomio R(x) = $3 - 4x + 6x^2 + 5x^3 + x^4 - x^5$ es un polinomio ordenado ascendente.

En general, sí tenemos la siguiente expresión

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots\ldots + a_n x^n$$

en donde: $a_n \neq 0$

$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots a_n$ etc. son números reales

"n" es un entero no negativo

se puede considerar *P(x)* como un polinomio en *"x"* de grado *"n"* y

1. Las cantidades $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots a_n$ son los coeficientes del polinomio.
2. *"x"* es la variable o parte variable del polinomio
3. *"n"* es el mayor exponente de *"x"* y determina el grado del polinomio (entero no negativo).
4. a_0 es el término independiente

Veamos algunos ejemplos:

Ej. 6 Sea $P(x) = 7x^3 - 3x + 2$, determinar las características del polinomio.

Solución

i.) términos: $7x^3$, -3x, 2
ii.) variable: *x*
iii.) grado: 3
iv.) coeficientes: 7 de x^3 ,0 de x^2 , -3 de *x*
v.) término independiente: 2
vi.) Polinomio Ordenado: **Si**, en orden descendente.
vii.) Polinomio Completo: **No**, ya que uno de sus coeficientes, el de x^2 ,es igual a cero.

Ej. 7 $P(y) = 2y^5 - 4y^4 + 2y^6 + 3y^2$ determinar las características del polinomio.

Solución

i.) términos: $2y^5$, $-4y^4$, $2y^6$, $3y^2$
ii.) variable: *y*
iii.) grado: 6
iv.) coeficientes: 2 de y^5, -4 de y^4, 2 de y^6, 3 de y^2, 0 de y^3, 0 de *y*
v.) término independiente: 0

vi.) Polinomio Ordenado: **No.**

vii.) Polinomio Completo: **No**, ya que existen coeficientes, el de y^2 y el de y, que son iguales a cero.

Ej. 8 $P(x) = 2x^{-3} + 3x^2 - 2x$, determinar las características del polinomio.

Solución

No es un polinomio porque tiene un exponente negativo en $\boldsymbol{2x^{-3}}$. Los exponentes deben ser enteros y no negativos.

Ej. 9 $P(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^2 + 2x + \frac{3}{4}$, determinar las características del polinomio.

Solución

i.) términos: $\frac{2}{3}x^3$, $-\frac{4}{5}x^2$, $2x$, $\frac{3}{4}$

i.) variable: x *ii)*grado: 3

ii.) coeficientes: $\frac{2}{3}$ de x^3, $-\frac{4}{5}$ de x^2, 2 de x,

iii.) término independiente: $\frac{3}{4}$

iv.) Polinomio Ordenado: **Si.** vi)) Polinomio Completo: **Si.**

Ej. 10 $\boldsymbol{P(x) = 3\sqrt{x} - 2x^2}$ determinar las características del polinomio.

Solución

$\boldsymbol{P(x) = 3\sqrt{x} - 2x^2}$ equivale a $\boldsymbol{P(x) = 3x^{1/2} - 2x^2}$

No es un polinomio porque tiene un exponente fraccionario. Los exponentes deben ser enteros y no negativos.

NOTA: *Si bien es cierto, los ejemplos 3 y 5 no son considerados como polinomios, son expresiones matemáticas que nos encontraremos a menudo y a las cuales también se les pueden aplicar algunas de las propiedades que vamos a estudiar.*

6.-Valor numérico de un polinomio :

Muchas veces nos vemos en la necesidad de evaluar un polinomio en un punto. Si le asignamos un número real a la variable, es necesario determinar el valor del polinomio para dicha variable.

Sea $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots\dots\dots + a_n x^n$ y sea x = c, entonces el valor del polinomio *P(*c*)* , se halla sustituyendo en el polinomio el valor de c, donde este el valor de *x.*

$$P(\mathrm{c}) = a_0 + a_1 \mathrm{c} + a_2 \mathrm{c}^2 + a_3 \mathrm{c}^3 + \dots\dots\dots + a_n \mathrm{c}^n$$

Ej. 11 Para el polinomio $P(x) = 5x^3 - 3x^2 + 4x - 6$, hallar el valor del polinomio en:

a) x = 2; b) x = -1; c) $x = \frac{1}{2}$ d) x = 1

Solución:

a) El valor del polinomio en x = 2 es *P(*2*)*, sustituimos en el polinomio $P(x) = 5x^3 - 3x^2 + 4x - 6$, el valor de x= 2 y nos queda:

$$\begin{aligned} P(2) &= 5 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 6 \\ &= 5 \cdot 8 - 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - 6 \\ &= 40 - 12 + 8 - 6 \\ &= 30 \end{aligned}$$

Entonces $P(2) = 30$

b) Veamos ahora el valor del polinomio *P* para x = -1. Sustituimos x = -1 en el polinomio $P(x) = 5x^3 - 3x^2 + 4x - 6$ y nos queda:

$$\begin{aligned} P(-1) &= 5 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 6 \\ &= 5 \cdot (-1) - 3 \cdot (1) + 4 \cdot (-1) - 6 \\ &= -5 - 3 - 4 - 6 \\ &= -18 \end{aligned}$$

Entonces $P(-1) = -18$

c) Ahora hallamos el valor del polinomio *P* para $x = \frac{1}{2}$. Sustituimos $x = \frac{1}{2}$ en el polinomio $P(x) = 5x^3 - 3x^2 + 4x - 6$ y nos queda:

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right) - 6$$
$$= 5\cdot\left(\frac{1}{8}\right) - 3\cdot\left(\frac{1}{4}\right) + 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right) - 6$$
$$= \frac{5}{8} - \frac{3}{4} + \frac{4}{2} - 6 = \frac{5 - 3\cdot 2 + 4\cdot 4 - 6\cdot 8}{8}$$
$$= \frac{5 - 6 + 8 - 48}{8} = \frac{-41}{8}$$

Entonces $P\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{41}{8}$

d) Ahora hallamos el valor del polinomio P para $x = 1$. Sustituimos $x = 1$ en el polinomio $P(x) = 5x^3 - 3x^2 + 4x - 6$ y nos queda:

$$P(1) = 5\cdot(1)^3 - 3\cdot(1)^2 + 4\cdot(1) - 6$$
$$= 5\cdot(1) - 3\cdot(1) + 4\cdot(1) - 6$$
$$= 5 - 3 + 4 - 6 = 0$$

Entonces $P(1) = 0$

7.- Raíces de un Polinomio:

Diremos que x_0 ***es una raíz de un polinomio*** P(x) si y sólo si se cumple que:

P(x_0) = 0, es decir

la raíz de un polinomio, es el valor que hace que el polinomio se anule.

Ej. 12 Sea P(x)= $x^3 + 2x^2 - 15x$, determinar si x_0=3 es una raíz del polinomio P.

Solución:

Veamos si x_0=3 es una raíz del polinomio P(x):

Calculemos para x_0=3 el valor de P(x_0)

$$P(3) = (3)^3 + 2(3)^2 - 15(3) = 27 + 2\cdot 9 - 45$$
$$= 27 + 18 - 45 = 45 - 45 = 0$$

Entonces $x_0 = 3$ es una raíz del polinomio *P(x)*

Ej. 13 Sea $P(x) = 25x^2 + 30x + 9$. Determinar si $x = -3/5$ es una raíz de *P(x)*.

Solución:

Veamos si $x = -3/5$ es una raíz de *P(x)*.

Sustituimos el valor de $x = -\frac{3}{5}$ en el polinomio *P(x)*:

$$P(-\tfrac{3}{5}) = 25\left(-\tfrac{3}{5}\right)^2 + 30\left(-\tfrac{3}{5}\right) + 9 = 25 \cdot \frac{9}{25} - \frac{90}{5} + 9$$

$$P(-\tfrac{3}{5}) = 9 - 18 + 9 \quad \Rightarrow P(-\tfrac{3}{5}) = 0$$

Es decir $x = -\frac{3}{5}$ es una raíz de *P(x).*

Veamos algunos métodos que nos permitirán hallar las raíces de un polinomio, empezaremos por el cálculo de las raíces de un polinomio de grado 2:

7.1. Raíces de un polinomio de grado 2:

Un polinomio de grado dos (2) es aquel en el cual el mayor exponente de la variable es dos (2). Por ejemplo

a) $x^2 - 2x + 3$
b) $3y^2 - y - 2$
c) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x^2 - 2x$

Para hallar las raíces de un polinomio de grado 2 es recomendable ordenar el polinomio en forma descendente e igualarlo a cero, así tendremos :

a) $x^2 - 2x + 3 = 0$
b) $3y^2 - y - 2 = 0$
c) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$

Hallar las raíces de un polinomio es hallar la solución de una ecuación cuadrática igualada a cero .

Para determinar las raíces de un polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$, se tiene que construir la ecuación cuadrática de la forma :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde:

"*a*" es el coeficiente de x^2, $a \neq 0$

"*b*" es el coeficiente de x

"c" es el término independiente.

Las raíces del polinomio (si existe) se obtiene mediante la fórmula cuadrática o resolvente:

$$\mathrm{x} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4bc}}{2a}$$

Tenga presente que el denominador "2*a*" pertenece a **toda** la expresión y no sólo a la raíz cuadrada.

La expresión "b^2 – 4*ac*" se denomina el discriminante (Δ) de la ecuación cuadrática y determina la naturaleza de las soluciones de la ecuación. Se nos pueden presentar tres casos:

a) Si "b^2 – 4*ac*" es positivo, la ecuación **tiene dos** soluciones reales, o el polinomio tiene dos raíces reales.

b) Si "b^2 – 4*ac*" es cero, la ecuación tiene sólo una solución real o el polinomio tiene **una** raíz doble.

c) Si "b^2 – 4*ac*" es negativo, la ecuación **no tiene** solución en los números reales, es decir el polinomio **no tiene raíces reales**.

Ej. 14 Hallar las raíces del siguiente polinomio: $\mathrm{P(x)} = 2\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} - 2$

Solución:

Igualamos a cero el polinomio $2\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} - 2 = 0$

Determinamos los valores de *a, b* y *c*.

$a = 2 \qquad b = 3 \qquad c = -2$

Luego calculamos el valor del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(2)(-2)$$
$$\Delta = 9 + 16 = 25$$

Como el discriminante resultó positivo, la ecuación tiene dos raíces reales.

Reemplazando en la "resolvente", tenemos:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(2)}, \quad x = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

Considerando el signo positivo de la raíz cuadrada obtenemos la primera solución: $x = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Ahora, considerando el signo negativo de la raíz cuadrada obtenemos la segunda solución: $x = \dfrac{-3-5}{4} = \dfrac{-8}{4} = -2$

Las raíces del polinomio son ½ y –2, ya que al reemplazar estos valores en la en el polinomio éste da cero.

Comprobación:

Si x = ½

$$P(\tfrac{1}{2}) = 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\tfrac{1}{2}\right) - 2$$
$$= 2\left(\tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{3}{2} - 2$$
$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} - 2$$
$$P(\tfrac{1}{2}) = 2 - 2 = 0$$

Si x = -2

$$P(-2) = 2(-2)^2 + 3(-2) - 2$$
$$= 2(4) - 6 - 2$$
$$P(-2) = 8 - 8 = 0$$

En ambos casos, el polinomio se anula.

Respuesta: Las raíces del polinomio $P(x) = 2x^2 + 3x - 2$ son x = ½ y x = -2

Ej. 15 Hallar las raíces del polinomio $R(x) = 9x^2 + 12x + 4$

Solución:

Igualamos a cero el polinomio $R(x)$, $9x^2 + 12x + 4 = 0$

Determinamos los valores de a, b y c.

$a = 9$ $b = 12$ $c = 4$

Luego calculamos el valor del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (12)^2 - 4(9)(4)$$
$$\Delta = 144 - 144$$
$$\Delta = 0$$

Como el discriminante es igual a cero, la ecuación tiene **una** solución real, es decir el polinomio tiene una sola raíz real.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4bc}}{2a} = \frac{-b}{2a} \qquad \left(\sqrt{b^2 - 4ac} = 0 \right)$$

$$x = \frac{-12}{2(9)} = \frac{-12}{18}$$

$$x = \frac{-2}{3}$$

La raíz del polinomio $R(x) = 9x^2 + 12x + 4$ –2/3, ya que al reemplazar este valor en el polinomio, éste da cero.

Comprobación:

$$R\left(\frac{-2}{3}\right) = 9\left(\frac{-2}{3}\right)^2 + 12\left(\frac{-2}{3}\right) + 4$$

$$= 9\left(\frac{4}{9}\right) - 4(2) + 4 \Rightarrow R\left(\frac{-2}{3}\right) = 4 - 8 + 4 = 0$$

Respuesta: La raíz del polinomio $9x^2 + 12x + 4 = 0$ es $x = -2/3$

Ej. 16 Hallar las raíces del polinomio $P(x) = 2x^2 - 3x + 5$

Solución:

Igualamos a cero el polinomio P(x), $2x^2 - 3x + 5 = 0$

Determinamos los valores de a, b y c.

a = 2 b = -3 c = 5

Luego calculamos el valor del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(5)$$
$$\Delta = 9 - 40$$
$$\Delta = -31$$

Como el discriminante es negativo, el polinomio **no tiene** raíces reales.

Respuesta: El polinomio $P(x) = 2x^2 - 3x + 5$ no tiene raíces reales.

7.2. Método de Ruffini

Este método sirve para hallar las raíces de polinomios de cualquier grado, generalmente cuando éstas son racionales. Generalmente se recomienda usarlo para los polinomios de grado igual o mayor a tres (3). Para explicarlo comencemos con un ejemplo sencillo, pues el procedimiento se clarifica al seguirlo paso a paso.

Ej. 18. Hallar las raíces del polinomio $P(x) = 2x^5 + 7x^4 - 18x^2 - 8x + 8$

Solución:

Paso 1: El polinomio debe estar completo y ordenado en forma decreciente. En éste caso se debe completar el polinomio, de esta forma nos queda:

$$2x^5 + 7x^4 + 0x^3 - 18x^2 - 8x + 8.$$

Paso 2: Debemos encontrar las posibles raíces racionales del polinomio. Para ello, buscamos los divisores del coeficiente del término con mayor exponente, en nuestro caso este términos es $2x^5$ y por lo tanto el coeficiente es 2 y sus divisores ±1; ±2.

Buscamos los divisores del término independiente, que en nuestro caso es 8 y sus divisores son ±1; ±2; ±4; ;±8.

Finalmente para encontrar las **posibles raíces racionales** del polinomio, se divide cada divisor del término independiente entre cada divisor del coeficiente del término de mayor exponente, estas raíces son: ±1; ±1/2; ±2; ±4; ±8.

Paso 3: Ahora escribimos los coeficientes de cada término en el mismo orden del paso1, de la siguiente manera:

	2	7	0	-18	-8	8

Paso 4: De ahora en adelante se procede a trabajar con las posibles raíces, intentamos con x = -1/2 . (Este proceso es netamente de tanteo, se requiere mucha práctica para determinar las raíz entre las posibles raíces)

Sumamos cero al primer coeficiente. Luego sumamos de forma vertical y colocamos el resultado en su lugar.

	2	7	0	-18	-8	8
½	0					
	2					

Multiplicamos por la posible raíz el resultado ½.(8) = 4 y escribimos el producto bajo el 7 y resolvemos esta suma vertical.

	2	7	0	-18	-8	8
½	0	1				
	2	8				

El resultado 8 lo multiplicamos por ½, entonces ½.(8) = 4, el cual lo colocamos bajo el 0 y resolvemos esta suma vertical.

	2	7	0	-18	-8	8
½	0	1	4			
	2	8	4			

El resultado 4 lo multiplicamos por ½, entonces ½.(4)=2, el cual lo colocamos bajo el -18 y resolvemos esta suma vertical.

	2	7	0	-18	-8	8
½	0	1	4	2		
	2	8	4	-16		

El resultado -16 lo multiplicamos por la raíz ½, entonces ½.(-16)= -8, el cual lo colocamos bajo el -8 y resolvemos esta suma vertical.

	2	7	0	-18	-8	8
½	0	1	4	2	-8	
	2	8	4	-16	-16	

El resultado -16 lo multiplicamos por ½, entonces ½.(-16)= -8, el cual lo colocamos bajo el 8 y resolvemos esta suma vertical.

	2	7	0	-18	-8	8
½	0	1	4	2	-8	-8
	2	8	4	-16	-16	0

Estos coeficientes equivalen a un polinomio de grado 5: $2x^5 + 7x^4 - 18x^2 - 8x + 8$

Estos coeficientes equivalen a un polinomio de un grado menor al de arriba, 4: $2x^4 + 8x^3 + 4x^2 - 16x - 16$

Muy bien, hemos encontrado una raíz $x = \frac{1}{2}$

Nota:

Observe que se repite el mismo proceso hasta que la última suma algebraica vertical dé cómo resultado cero. Si esto no sucede, entonces el número elegido no es raíz. Siempre debe probar hasta encontrar la raíz adecuada.

Utilicemos otra de las posibles raíces del polinomio para seguir el proceso de Ruffini para ver si encontramos otra raíz del polinomio.

Probamos con la posible raíz x = -2,

	2	7	0	-18	-8	8
½	0	1	4	2	-8	-8
	2	8	4	-16	-16	0
-2	0	-4	-8	8	16	
	2	4	-4	-8	0	

Acabamos de obtener otra raíz x= - 2. Probemos ahora con x = 2

	2	7	0	-18	-8	8
½	0	1	4	2	-8	-8
	2	8	4	-16	-16	0
-2	0	-4	-8	8	16	
	2	4	-4	-8	0	
2	0	4	16	24		
	2	8	12	16		

Como el resultado de la última suma algebraica no es cero, podemos decir que x = 2 **no es raíz** del polinomio.

Probamos nuevamente con x = -2

	2	7	0	-18	-8	8
½	0	1	4	2	-8	-8
	2	8	4	-16	-16	0
-2	0	-4	-8	8	16	
	2	4	-4	-8	0	
-2	0	-4	0	8		
	2	0	-4	0		

Observamos que encontramos $x = -2$ es raíz doble del polinomio.

Por otro lado fíjese en que 2, 0, - 4 son los coeficientes de un polinomio de segundo grado, por lo tanto lo escribimos como tal ($2x^2 + 0x - 4 = 2x^2 - 4$), y hallamos las raíces por el método de la resolvente y obtenemos que las raíces de $2x^2 - 4 = 0$ son $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$.

Finalmente la expresión $2x^5 + 7x^4 - 18x^2 - 8x + 8$, tiene cuatro (4) raíces diferentes:

Respuesta: $x = 1/2$; $x = -2$ (raíz doble); $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$

<u>Ej. 19.</u> Factorice la expresión $x^4 + x^3 - x - 1$

<u>Solución:</u>

Paso 1: El polinomio debe estar completo y ordenado en forma decreciente. En éste caso se debe completar el polinomio, de esta forma nos queda:

$$x^4 + x^3 + 0x^2 - x - 1.$$

Paso 2: las posibles raíces son: ± 1

Ahora ubiquemos los coeficientes en la galera y probemos con las posibles raíces.

	1	1	0	-1	-1
1	0	1	2	2	1
	1	2	2	1	0
-1	0	-1	-1	-1	
	1	1	1	0	

Se ha probado con las dos raíces posibles $x = \pm 1$, ya no es posible hallar otra raíz por el método de Ruffini en la expresión resultante del método: $x^2 + x + 1$. Si intentamos hallar las raíces de esta última expresión por el método de la resolvente, nos daremos cuenta que no tiene raíces reales.

Entonces las raíces del polinomio $x^4 + x^3 - x - 1$ son $x = -1$. y $x = 1$

8.- Operaciones con Polinomios:

8.1.- Adición de Polinomios:

Para la adición o suma de polinomios es importante la comprensión del manejo de términos semejantes. Es conveniente seguir el procedimiento indicado:

- Se ordenan los polinomios (preferiblemente de forma descendente)
- Se completan los polinomios incompletos, dejando el espacio en blanco o colocando cero como coeficiente de los términos que no aparecen en el polinomio.
- Se suman verticalmente los coeficientes de los términos semejantes

Ej. 17 Dados $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 5$ y $Q(x) = 4x^2 - 3x + 2$, hallar *P(x)+Q(x)*

Solución:

$$\begin{array}{rl} P(x) = & 3x^3 - 2x^2 + x - 5 \quad + \\ Q(x) = & \; 4x^2 - 3x + 2 \\ \hline P(x) + Q(x) = & 3x^3 + 2x^2 - 2x - 3 \end{array}$$

Observe que se suman algebraicamente los términos semejantes y la respuesta se ofrece ordenada descendentemente con respecto a "x".

Respuesta: $P(x) + Q(x) = 3x^3 + 2x^2 - 2x - 3$

Ej. 18 Dados $P(x) = 4x^2a - 3a^2 + 2xa^2 - 3x^2$ y $Q(x) = 2xa^2 - x^2a + 2x^2$

Se pide encontrar $P(x) + Q(x)$.

Solución:

$$\begin{array}{rl} P(x) = & 4x^2a - 3a^2 + 2xa^2 - 3x^2 \quad + \\ Q(x) = & -x^2a + 0a^2 + \; 2xa^2 + 2x^2 \\ \hline P(x) + Q(x) = & 3x^2a - 3a^2 + 4xa^2 - \; x^2 \end{array}$$

Respuesta: $P(x) + Q(x) = 3x^2a - 3a^2 + 4xa^2 - \; x^2$

Ej. 19 Dados los siguientes polinomios $P(x) = \frac{3}{5}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}$ y

$Q(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{5}{4}$. Hallar $P(x) + Q(x)$.

Solución:

$$\begin{array}{rcccc} P(x) = & \frac{3}{5}x^3 & -\frac{5}{2}x^2 & +2x & -\frac{1}{3} \\ Q(x) = & \frac{1}{2}x^3 & +\frac{5}{3}x^2 & +\frac{1}{5}x & +\frac{5}{4} \\ \hline \end{array} \quad +$$

$$P(x)+Q(x) = (\frac{3}{5}+\frac{1}{2})x^3 + (-\frac{5}{2}+\frac{5}{3})x^2 + (2+\frac{1}{5})x + (-\frac{1}{3}+\frac{5}{4})$$

$$= (\frac{6+5}{10})x^3 + (\frac{-15+10}{6})x^2 + (\frac{10+1}{5})x + (\frac{-4+15}{12})$$

Respuesta: $P(x)+Q(x) = \frac{11}{10}x^3 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{11}{5}x + \frac{11}{12}$

<u>NOTA:</u>

Esta suma de polinomios, también puede resolverse sumando horizontalmente los coeficientes de los términos semejantes; sin embargo, cuando sea oportuno, resulta de mucha ayuda visual colocarlo en forma de suma vertical.

<u>8.2.- Sustracción de Polinomios:</u>

Se sigue un procedimiento semejante a la adición o suma de polinomios, pero esta vez, considerando el signo negativo que precede al sustraendo.

Ej. 20 Dados $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 5$ y $Q(x) = 4x^2 - 3x + 2$. Se pide encontrar *P(x) – Q(x)*

Solución:

Se ordenan los polinomios y se colocan en forma vertical

$$\begin{array}{rcccc} P(x) = & 3x^3 - 2x^2 & + & x & - 5 \\ Q(x) = & +4x^2 & & -3x & + 2 \end{array} \quad -$$

Luego procedemos a restar los coeficientes de los términos semejantes:

$$\begin{array}{lllll} P(x) = 3x^3 & -\ 2x^2 & +\ x & -\ 5 & - \\ Q(x) = & +4x^2 & -3x & +\ 2 & \\ \hline \end{array}$$

$P(x) – Q(x) = 3x^3 + (-2 - (+ 4))x^2 + (1 – (-3))x + (-5 – (+2))$

$P(x) – Q(x) = 3x^3 + (-2 - 4) x^2 + (1 +3) x + (-5 – 2)$

Respuesta: $P(x) – Q(x) = 3x^3 -6x^2 + 4x -7$

> **NOTA:** *La resta o sustracción de polinomios, también puede resolverse horizontalmente, tomando en cuenta el signo negativo que precede al sustraendo*

Ej. 21 Dados $P(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 3$ y $Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x + 9$

Hallar $P(x) – Q(x)$

Solución:

$$P(x) – Q(x) = (4x^3 - 3x^2 + 2x - 3) - (2x^3 - 4x^2 + 2x + 9)$$

$$P(x) – Q(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \quad - 2x^3 + 4x^2 - 2x - 9$$

Agrupamos términos semejantes

$$P(x) – Q(x) = (4-2)x^3 + (-3+4)x^2 + (2-2)x + (-3-9)$$

Respuesta: $P(x) – Q(x) = 2x^3 + x^2 - 12$

Ej. 22 Dados $P(x) = \frac{2}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^4 + 5x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{3}{4}x$ y

$Q(x) = 5x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 15$. Hallar $P(x) – Q(x)$

Solución:

$$P(x)–Q(x) = (\frac{2}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^4 + 5x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{3}{4}x) - (5x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 15)$$

$$P(x)–Q(x) = \frac{2}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^4 + 5x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{3}{4}x - 5x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 15$$

$P(x)–Q(x) =$ $\left(\frac{2}{5}-5\right)x^5+\left(\frac{4}{3}+4\right)x^4+(5-2)x^3+\left(-\frac{8}{3}+3\right)x^2+\left(\frac{3}{4}-1\right)x+(15)$

$P(x)–Q(x) =$ $\left(\frac{2-10}{5}\right)x^5+\left(\frac{4+12}{3}\right)x^4+(7)x^3+\left(\frac{-8+9}{3}\right)x^2+\left(\frac{3-4}{4}\right)x+15$

Respuesta: $P(x)–Q(x) =$ $-\frac{8}{5}x^5+\frac{16}{3}x^4+7x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x+15$

8.3.- Multiplicación de Polinomios:

a) **Monomio por Polinomio**: Este caso se presenta con muchísima frecuencia y se resuelve utilizando la propiedad distributiva de la multiplicación. El grado del polinomio resultante de la multiplicación de un monomio por un polinomio es igual a la suma de los grados de ambos.

Ej. 23 Multiplique $(2x^3)$ por $(4x^4-2x^2+x-2)$

Solución:

El grado del monomio es 3 y el grado del polinomio es 4. Veamos a continuacción el producto:

$$(2x^3)\times(4x^4-2x^2+x-2)$$

Se multiplica $2x^3$ por **cada uno** de los términos del polinomio

$$=(2x^3)(4x^4)+(2x^3)(-2x^2)+(2x^3)(x)+(2x^3)(-2)$$

En cada término multiplicamos los coeficientes y multiplicamos las variables

$$=(2\cdot 4)(x^3\cdot x^4)+(2\cdot(-2))(x^3\cdot x^2)+(2\cdot 1)(x^3\cdot x)+(2\cdot(-2))x^3$$

$$=8x^{3+4}-4x^{3+2}+2x^{3+1}-4x^3$$

Respuesta: $8x^7-4x^5+2x^4-4x^3$

Observe que el grado del polinomio resultante del producto del monomio por un polinomio es El Grado del Monomio + El Grado del Polinomio = 3 + 4 = 7

Ej. 24 Multiplique $(4xy^2)$ por $(xy-2xy^2+3y^3+x^3)$

Solución:

$$(4xy^2)\times(xy-2xy^2+3y^3+x^3)$$

Aplicamos el mismo procedimiento del ejemplo anterior, se multiplica $4xy^2$ por **cada uno** de los términos del polinomio

$$\left(4xy^2\right)\left(xy\right)+(4xy^2)(-2xy^2)+(4xy^2)(3y^3)+(4xy^2)(x^3)$$

En cada término multiplicamos los coeficientes y multiplicamos las variables

$$(4)(x\cdot x)(y^2\cdot y)+(4\cdot(-2))(x\cdot x)(y^2\cdot y^2)+(4\cdot 3)(x)(y^2\cdot y^3)+(4)(x\cdot x^3)y^2$$

Respuesta: $4x^2y^3-8x^2y^4+12xy^5+4x^4y^2$

b) **Polinomio por Polinomio**: Puede resolverse utilizando la propiedad distributiva o pueden colocarse un polinomio bajo el otro y realizar una multiplicación de la forma normal.

El grado del polinomio resultante de la multiplicación de dos polinomios <u>es la suma</u> de los grados de cada polinomio.

Veamos a continuación como resolvemos el producto de dos polinomios:

<u>Ej. 25</u> : Dados los polinomios $P(x)=4x^2+3x-2$ y $Q(x)=2x+5$, hallar

$$P(x)\times Q(x)$$

Solución:

El grado del polinomio $P(x)$ es 2 y el grado del polinomio $Q(x)$ es 1. Ambos polinomios están ordenados en forma descendente.

Para multiplicar ambos polinomios, vamos a colocarlos uno bajo el otro, preferiblemente el de más términos arriba y el de menos términos abajo. Si los polinomios no están ordenados, deben ordenarse, preferiblemente en forma descendente.

$$\begin{array}{r} 4x^2+3x-2 \quad \times \\ 2x+5 \\ \hline 2x\cdot(4x^2+3x-2) \\ 5\cdot(4x^2+3x-2) \end{array}$$

Multiplicamos cada término del polinomio de abajo por todo el polinomio de arriba.

Y nos queda:

$$\begin{array}{rrrr} & 4x^2 & +3x & -2 \\ & & 2x & +5 \\ \hline 8x^3 & +6x^2 & -4x & \\ & +20x^2 & +15x & -10 \\ \hline 8x^3 & +26x^2 & +11x & -10 \end{array}$$

De esta forma se pueden sumar directamente los términos semejantes, siempre y cuando estén ambos polinomios ordenados en la misma forma (descendente o ascendente).

Note que el grado del polinomio resultante de la multiplicación (3) es la suma de los grados de los polinomios (2 + 1) .

Respuesta: $P(x) \times Q(x) = 8x^3 \quad + 26x^2 \quad + 11x - 10$

Ej. 26 Hallar $\left(2x^2 - 3x + 4\right) \times \left(x - 3x^2 + 2\right)$

Solución:

Observe que el grado del 1^er^ polinomio es 2 y el grado del 2^do.^ polinomio es 2. Ahora colocamos los polinomios ya ordenados en forma descendente y multiplicamos:

$$
\begin{array}{rl}
2x^2 - 3x + 4 \qquad \times & \\
-3x^2 + x + 2 & \\
\hline
-6x^4 + 9x^3 - 12x^2 & \longleftarrow (-3x^2) \cdot (2x^2 - 3x + 4) \\
2x^3 - 3x^2 + 4x & \longleftarrow (x) \cdot (2x^2 - 3x + 4) \\
4x^2 - 6x + 8 & \longleftarrow 2 \cdot (2x^2 - 3x + 4) \\
\hline
-6x^4 + 11x^3 - 11x^2 - 2x + 8 &
\end{array}
$$

Respuesta: $\left(2x^2 - 3x + 4\right) \times \left(x - 3x^2 + 2\right) = -6x^4 + 11x^3 - 11x^2 - 2x + 8$ y el grado del polinomio resultante es 4.

Veamos a continuación un ejemplo donde utilizaremos la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma o resta de términos, para resolver la multiplicación o producto de polinomios.

Ej. 27 Sean $P(x) = 8x^2 - 3x + 4$ y $Q(x) = 5x^3 + 4x^2 - 5x + 1$. Hallar $P(x) \times Q(x)$.

Solución:

$P(x) \times Q(x) = (8x^2 - 3x + 4) \times (5x^3 + 4x^2 - 5x + 1)$

Multiplicamos cada término del polinomio $P(x)$ por cada uno de los términos del polinomio $Q(x)$,

$$P(x)\times Q(x) = (8x^2)\cdot(5x^3)+(8x^2)\cdot(4x^2)+(8x^2)\cdot(-5x)+(8x^2)\cdot(1)+$$
$$(-3x)\cdot(5x^3)+(-3x)\cdot(4x^2)+(-3x)\cdot(-5x)+(-3x)\cdot(1)+$$
$$4\cdot(5x^3)+4\cdot(4x^2)+4\cdot(-5x)+4\cdot(1)$$

Multiplicamos los coeficientes y multiplicamos las variables y nos queda:

$$P(x)\times Q(x) = (8\cdot 5)\cdot(x^2x^3)+(8\cdot 4)\cdot(x^2x^2)-(8\cdot 5)\cdot(x^2x)+(8)(x^2)+$$
$$-(3\cdot 5)\cdot(x\,x^3)-(3\cdot 4)\cdot(x\,x^2)+(3\cdot 5)\cdot(x\,x)-(3x)+$$
$$4\cdot 5\cdot x^3+4\cdot 4\cdot x^2-4\cdot 5\cdot x+4$$

Ahora multiplicamos los coeficientes y aplicamos las propiedades de la Potenciación, y nos queda:

$$P(x)\times Q(x) = 40x^5+32x^4-40x^3+8x^2-15x^4-12x^3+15x^2-3x+20x^3+$$
$$+16x^2-20x+4$$

Agrupamos los términos semejantes

$$P(x)\times Q(x) = 40x^5+(32-15)x^4+(-40-12+20)x^3+(8+15+16)x^2-(3+20)x+4$$
$$P(x)\times Q(x) = 40x^5+17x^4-32x^3+39x^2-23x+4$$

Respuesta: $P(x)\times Q(x) = 40x^5+17x^4-32x^3+39x^2-23x+4$

Ej. 28 Dados los polinomios $P(x)=\frac{2}{3}x^4-\frac{5}{3}x^3+2x^2+\frac{6}{5}$ y $Q(x)=\frac{6}{7}x^3+\frac{7}{2}x-\frac{1}{6}$,

hallar $P(x)\times Q(x)$

Solución:

$$P(x)\times Q(x) = \left(\frac{2}{3}x^4-\frac{5}{3}x^3+2x^2+\frac{6}{5}\right)\times\left(\frac{6}{7}x^3+\frac{7}{2}x-\frac{1}{6}\right)$$

Multiplicamos cada término del polinomio $P(x)$ por cada uno de los términos del polinomio $Q(x)$,

$$P(x)\times Q(x) = \left(\frac{2}{3}x^4\right)\cdot\left(\frac{6}{7}x^3\right)+\left(\frac{2}{3}x^4\right)\cdot\left(\frac{7}{2}x\right)+\left(\frac{2}{3}x^4\right)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\quad +$$
$$+\left(-\frac{5}{3}x^3\right)\cdot\left(\frac{6}{7}x^3\right)+\left(-\frac{5}{3}x^3\right)\cdot\left(\frac{7}{2}x\right)+\left(-\frac{5}{3}x^3\right)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\quad +$$
$$+(2x^2)\cdot\left(\frac{6}{7}x^3\right)+\left(2x^2\right)\cdot\left(\frac{7}{2}x\right)+\left(2x^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\qquad +$$

$$+\left(\frac{6}{5}\right)\cdot\left(\frac{6}{7}x^3\right)+\left(\frac{6}{5}\right)\cdot\left(\frac{7}{2}x\right)+\left(\frac{6}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)$$

Multiplicamos los coeficientes y multiplicamos las variables y nos queda:

$$P(x)\times Q(x)=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}\right)\cdot\left(x^4\cdot x^3\right)+\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{2}\right)\cdot\left(x^4\cdot x\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot x^4 \quad +$$

$$-\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{7}\right)\cdot\left(x^3\cdot x^3\right)-\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{2}\right)\cdot\left(x^3\cdot x\right)+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot x^3 \quad +$$

$$+\left(2\cdot\frac{6}{7}\right)\cdot\left(x^2\cdot x^3\right)+\left(2\cdot\frac{7}{2}\right)\cdot\left(x^2\cdot x\right)-\left(2\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot x^2 \quad +$$

$$+\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\right)\cdot x^3+\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{2}\right)\cdot x-\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot$$

Ahora multiplicamos las fracciones y las simplificamos, además aplicaremos las propiedades de la Potenciación y nos queda:

$$P(x)\times Q(x)=\frac{4}{7}\cdot x^7+\frac{7}{3}\cdot x^5-\frac{1}{9}\cdot x^4-\frac{10}{7}x^6-\frac{35}{6}x^4+\frac{5}{18}x^3+\frac{12}{7}x^5+7x^3-\frac{1}{3}x^2+$$

$$+\frac{36}{35}\cdot x^3+\frac{21}{5}\cdot x-\frac{1}{5}\cdot$$

Agrupamos los términos semejantes:

$$P(x)\times Q(x)=\frac{4}{7}\cdot x^7-\frac{10}{7}x^6+\left(\frac{7}{3}+\frac{12}{7}\right)\cdot x^5+\left(-\frac{1}{9}-\frac{35}{6}\right)\cdot x^4+\left(\frac{5}{18}+7+\frac{36}{35}\right)\cdot x^3+$$

$$+\frac{1}{3}\cdot x^2+\frac{21}{5}x-\frac{1}{5}$$

Resolviendo las fracciones, nos queda que: **Respuesta:**

$$P(x)\times Q(x)=\frac{4}{7}\cdot x^7-\frac{10}{7}x^6+\frac{85}{21}x^5-\frac{107}{18}x^4+\frac{5.845}{630}x^3+\frac{1}{3}x^2+\frac{21}{5}x-\frac{1}{5}$$

8.4.- División de Polinomios:

Para realizar esta operación el polinomio dividendo debe ser de grado mayor o igual al grado del polinomio divisor. Al igual que en una división de números reales, los elementos que componen una división entre polinomios son: Dividendo, Divisor, Cociente y Residuo. Si el Residuo es cero la división se clasifica como exacta.

Por ejemplo, dividir el polinomio P(x) entre el polinomio Q(x), es decir P(x) $\div$ Q(x), entonces el **dividendo** es P(x), **el divisor** es Q(x) y **el cociente** C(x) se define como aquel polinomio que cumple con la siguiente relación:

P(x) = Q(x) $\times$ C(x) + R(x) ; donde R(x) es **el residuo**.

Entonces:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} \quad R(x) & C(x) \end{array} \quad ; \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Veamos a continuación como hacer la división de dos polinomios:

a) **Polinomio dividido entre monomio**.

Ej. 29 Sea $P(x) = 12x^5 - 10x^4 + 4x^3$ y sea $Q(x) = 2x^2$. Hallar $P(x) \div Q(x)$.

Solución:

$$P(x) \div Q(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{12x^5 - 10x^4 + 4x^3}{2x^2}$$

Cuando el denominador es un monomio, se separa la fracción original en tres fracciones con igual denominador, y obtenemos

$$= \frac{12x^5}{2x^2} - \frac{10x^4}{2x^2} + \frac{4x^3}{2x^2}$$

Luego simplificamos , tanto los coeficientes, como las variables:

$$= 6x^3 - 5x^2 + 2$$

Dividiendo los coeficientes:
$\frac{12}{2} = 6$; $\frac{10}{2} = 5$; $\frac{4}{2} = 6$
Dividiendo las variables:
$\frac{x^5}{x^2} = x^3$; $\frac{x^4}{x^2} = x^2$; $\frac{x^3}{x^2} = x$

Respuesta:

$$P(x) \div Q(x) = 6x^3 - 5x^2 + 2$$

Ej. 30 Sea $P(x)=6x^4-3x^2+9x$ y sea $Q(x)=3x^2$. Hallar $P(x)\div Q(x)$

Solución:

$$P(x)\div Q(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{6x^4-3x^2+9x}{3x^2}=\frac{6x^4}{3x^2}-\frac{3x^2}{3x^2}+\frac{9x}{3x^2}$$

Simplificando , tenemos: $=2x^2-1+\dfrac{3}{x}$

Respuesta: $P(x)\div Q(x)=2x^2-1+\dfrac{3}{x}=2x^2-1+3x^{-1}$

> **NOTA:**
> *Observe que el resultado de la división no es un polinomio, ya que el exponente del último término es negativo. Cuando dividimos, en general un polinomio entre otro polinomio o un monomio, el resultado no siempre es un polinomio. Si observamos en el ejemplo 28, el exponente del término de menor potencia (9x) es*

b) Polinomio dividido entre Polinomio:

El procedimiento que usaremos para resolver la división entre polinomio, será descrito en el siguiente ejemplo.

Ej. 31 Hallar $\dfrac{4x^5-x^3+6x^2-3x}{2x-1}$

Solución:

El **dividendo** es $4x^5-x^3+6x^2-3x$ y **el divisor** es $2x-1$. Tanto el dividendo como el divisor tienen que estar completos y ordenados en forma descendente; si ello no es así, entonces éstos deben ordenarse y/o completarse, antes de comenzar la división.

Escribimos el ejercicio de la siguiente forma, dejando un espacio para los términos sin coeficientes: x^4 y el término independiente.

$$
\begin{array}{l|l}
4x^5 \qquad -x^3+6x^2-3x & 2x-1 \\ \cline{2-2}
-4x^5+2x^4 & 2x^4+x^3+3x \\ \cline{1-1}
\qquad 2x^4-x^3+6x^2-3x & \\
\quad -2x^4+x^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 6x^2-3x & \\
\qquad\quad -6x^2+3x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Residuo parcial: $2x^4-x^3+6x^2-3x$

Residuo: 0

Resultado: $2x^4+x^3+3x$

1.- Dividimos $4x^5$ entre $2x$

$$\frac{4x^5}{2x}=2x^4$$

2.-Multiplicamos $2x^4$ por $(2x-1)$ y lo colocamos bajo el dividendo, cambiando el signo del resultado.

3.-Sumamos verticalmente y "bajamos" los términos restantes, obteniendo un "***Residuo parcial***".

4.- Dividimos el término $2x^4$ del **residuo parcial** entre 2x

$$\frac{2x^4}{2x}=x^3$$

5.- Repetimos el proceso hasta que el grado del residuo parcial sea menor que el grado del divisor. Observe que ésta es una división exacta.

<u>Ej. 32</u> Dados $P(x)=6x^5-4x^4-9x^2+6$ y $Q(x)=3x-2$. Hallar $P(x)\div Q(x)$.

Solución:

$$P(x)\div Q(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{6x^5-4x^4-9x^2+6}{3x-2}$$

Para los pasos comentados de la solución refiérase al ejemplo anterior.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
6x^5 - 4x^4 & -9x^2 & & +6 & 3x-2 \\
\cline{5-5}
-6x^5 + 4x^4 & & & & 2x^4 - 3x - 2 \quad \textbf{\textit{Cociente:}}\ C(x) \\
\hline
& -9x^2 & & +6 & \\
& 9x^2 & -6x & & \\
\hline
& & -6x & +6 & \\
& & +6x & -4 & \\
\hline
& & & 2 & \quad \textbf{\textit{Residuo}}\ R(x)
\end{array}
$$

Como $P(x) \div Q(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$ y el residuo es diferente de cero,

entonces $P(x) \div Q(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{6x^5 - 4x^4 - 9x^2 + 6}{3x-2} = (2x^4 - 3x - 2) + \dfrac{2}{3x-2}$

Respuesta: $P(x) \div Q(x) = (2x^4 - 3x - 2) + \dfrac{2}{3x-2}$

9.- Resolución de Problemas:

Una de las dificultades enfrentada por los estudiantes en la cátedra de matemáticas, radica en ser capaces de traducir un enunciado a relaciones y ecuaciones matemáticas. Sin embargo, es importante adquirir destreza en este tópico, ya que la mayoría de las materias requieren resolver ejercicios donde la solución se obtiene mediante relaciones matemáticas. Las relaciones y ecuaciones matemáticas se expresan a través de constantes, variables y operaciones numéricas, es decir a través del planteamiento de una expresión algebraica. Vamos a ver a continuación algunas sugerencias que intentan servir de guía para ayudarlos a resolver este tipo de problemas o modelos.

1. Lea “cuidadosamente” el enunciado del problema.
2. Vuelva a leer el enunciado **tantas veces sean necesarias** hasta comprender perfectamente los datos que ofrece el problema y lo que le piden encontrar.
3. Cuando sea necesario, acostúmbrese a realizar un bosquejo de la situación planteada, en forma gráfica o en un planteamiento inicial.
4. Identifique con variables (Letras), los datos e incógnitas del problema.

5. Obtenga los datos del enunciado y relaciónelos matemáticamente mediante ecuaciones o fórmulas (Algunos datos o fórmulas no se dan en forma explícita en los problemas, se supone que usted debe conocerlas. Ej.: Área, Volumen, Velocidad, Aceleración gravitacional, etc.).

Esta secuencia de pasos nos sirve para llegar hasta el planteamiento del problema, sin resolverlo. Es objetivo de este tema, llevarnos hasta la identificación de las relaciones y ecuaciones matemáticas que vendrán representadas por la expresión algebraica correspondiente.

Preste atención a los siguientes ejercicios, analícelos y resuélvalos por usted mismo. No olvide que la práctica es el arma que le dará la destreza necesaria para dominar cualquier tema en matemáticas, incluyendo éste.

Ej. 33 La suma de tres números es 93. El segundo es 9 unidades mayor que el menor y 9 unidades menor que el mayor. Encuentre los números.

Solución:

Pasos 1 y 2: Lea bien y con precaución el enunciado, pues al hacerlo muy rápido puede confundirse con los términos empleados. Evite considerar el ejercicio como un juego de palabras o trabalenguas; lea poco a poco hasta comprender lo que se pide y lo que se proporciona.

En este caso, el **paso 3** no es necesario.

Paso 4: Identificar el objetivo del problema.

Vamos a asignarle variables a las incógnitas:

Número Menor = $\boldsymbol{x}$

2^{do} número = $\boldsymbol{y}$

Número Mayor = $\boldsymbol{z}$

Paso 5: Obtener datos y relacionarlos matemáticamente.

El problema nos indica lo siguiente:

a) La suma de los tres (3) números es 93, es decir,

$$\boldsymbol{x + y + z = 93}$$

b) El 2^{do} número es 9 unidades mayor que el menor, es decir,

$$y = x + 9$$

Verifique su relación, no es igual colocar : $y + 9 = x$. Razone y explique porqué.

c) *"y es 9 unidades menor que el mayor"*, es decir

$$y = z - 9$$

Observe que aún estamos hablando del 2^{do}número. La relación $y = z - 9$, indica que se debe cumplir que y es menor que z..

Si hubiésemos colocado la relación $y - 9 = z$, ¿En qué contradice el enunciado ?

Paso 6: Procesamos los datos matemáticamente y resolvemos.

Finalmente tenemos tres (3) ecuaciones con tres(3) incógnitas:

$$\left.\begin{array}{ll} x + y + z & = 93 \\ & \\ y & = x + 9 \\ y & = z - 9 \end{array}\right\}$$

(1) Ecuación Base

(2) Ecuaciones Condicionales

Verifique si los números buscados son 22, 31 y 40.

Ej. 34 Hallar dos números reales tales que la suma de los mismos es 14 y su producto es 45.

Solución:

Definiremos nuestras incógnitas (los dos números reales) como:

$x = 1^{er.}$ número

$y = 2^{do.}$ número

Tenemos que de acuerdo al enunciado, la suma de los dos números es 14, es decir:

$$x + y = 14 \qquad \textbf{(Ec. 1)}$$

y además que el producto de los mismos es 45,

$$x \cdot y = 45 \qquad \textbf{(Ec. 2)}$$

Verifique cuales de los siguientes valores de x, y cumple con las dos ecuaciones:

a) $x = 9,\ y = 5$ b) $x = 7,\ y = 7$ c) $x = 5,\ y = 9$ d) $x = 15,\ y = 3$

10.- Ejercicios propuestos:

I. Plantear las ecuaciones que definen cada uno de los problemas:

i) Escribe, usando sólo una incógnita, un número entero menos la mitad de dicho número.

ii) Escribe el doble de un número más dicho número, usando sólo una incógnita.

iii) Escribe, con una sola incógnita, el doble de un número más el cuadrado de dicho número, menos un tercio de la suma anterior.

iv) Escribe un quinto de un número entero, más la mitad de su cuadrado disminuido en 2, usando sólo una incógnita.

v) Hallar dos números, tales que la suma del triple del menor y el doble del mayor sea 7; y el doble del menor aumentado en 4 unidades sea el triple del mayor.

vi) En un cine particular la entrada para adultos es de $4 y para niños es de $1,50. Si el cine vendió 253 boletos con una venta total de $557. ¿Cuántos adultos y cuantos niños asistieron a la función?.

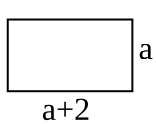
vii) La energía potencial de un cuerpo es igual al producto de su masa **m**, por la aceleración de gravedad **g** y por la altura **h** a la que se encuentra”. Escribe la fórmula que permita calcular la energía potencial **Ep**. Resuelve el siguiente problema para los siguientes datos.

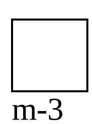
> *Si una bola de masa* ***m*** *=15 se encuentra a una altura* ***h*** *= 22 y tiene aceleración* ***g****, entonces su energía potencial es:*

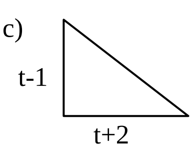
viii) La cancha de fútbol de un colegio tiene las siguientes dimensiones: *a* metros de largo y *b* metros de ancho. Calcula el área de la cancha.

ix) Un televisor tiene una pantalla plana que mide **a** cm. por lado. ¿Cuál es el área de la pantalla?

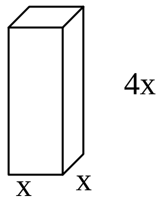
x) Escribir la expresión algebraica que indica el área de cada una de las siguientes figuras

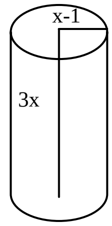
a)


b)


c)


xi) Expresar el área lateral, el área total y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos mediante un polinomio

a) 

b) 

II.- Hallar el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

i) $x^2+2xy+y^2$ para $x=2$, $y=3$; ii) $x^2-2xy+y^2$ para $x=5$, $y=3$

iii) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ para $x=13$, $y=3$

III.- Efectúe las siguientes operaciones:

i) $a-\{5b-[a-(3c-3b)+2c-(a-2b-c)]\}$

ii) $a^2-\{5ab^2-[a^2+3a-(3a-3ab^2)-(a^2-2ab^2-a)]\}$

iii) $5mc^2-[x^2-(3c-3mc^2)+2c-(x^2-2mc^2-c)]$

iv) $(x-a)(x-b)(x-c)$; v) $(x-y)(x+y)-[xy-(xy-x^2)]$

IV. Dados los polinomios, P,Q,R y S, hallar:

1)

(a) P(x)+Q(x) (b) P(x)-Q(x)+R(x) (c) Q(x)-R(x)+S(x)

(d) 5P(x)-3Q(x)+R(x)+S(x) e) 2P(x)-5R(x)+6S(x)

Para:

P(x)= x^3-3x^2+8x-6; Q(x)= $5-x+8x^2+5x^3-2x^4$;

R(x)= $2x^4-3x+1$; S(x)= $5x^4-4x^3+2x^2-6x+8$

2)

(e) P(a)+Q(a) *(f) P(a)-Q(a)+R(a)* *(g) Q(a)-R(a)+S(a)*

(h) 5P(a)-3Q(a)+R(a)+S(a) *e) 2P(a)-5R(a)+6S(a)*

P(a)= $3a^2-7ab+3b^2-2$; Q(a)= $a^2-ab+6ab^2+5a^2b-3b^2$

R(a)= $5a^2b+3ab^2-(a^2-2b^2)$; S(a)= b^2-7a^2+4ab

V. Dados los polinomios, P y Q, hallar el producto P(x)xQ(x):

1) P(x) = $x^2 + xy + y^2$; Q(x)= $2x - y$

2) P(a)= $a^3 - 5a + 2$; Q(a)= $a^2 - a + 5$

3) P(m)= $5m^4 - 3m^2n^2 + n^4$; Q(m)= $3m - n$

4) P(x)= $8x^3 - 9y^3 + 6xy^2 - 12x^2y$ Q(x)= $2x + 3y$

VI.- Dados los polinomios, P y Q, hallar la división $P \div Q$ y determinar en cada uno de los casos cual es **el cociente** y cual es **el residuo**:

i) P(x)= $5x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 171x + 4$; Q(x)= $x^2 + 3x + 1$

ii) P(x)= $4x^3 - 5x^2 + 3x - 2$; Q(x)= $2x - 3$

iii) P(m)= $m^6 + m^5 - 4m^4 - 4m + m^2 - 1$; Q$(m)$= $m^3 + m^2 - 4m - 1$

iv) P(x)= $16x^8 - 16y^8$ Q(x)= $2x^2 + 2y^2$

v) P(x)= $3x^5 - 21x^4y + 10x^3y^2 + 64x^2y^3 + 32xy^4$; Q(x)= $x^3 - 5x^2y - 4xy^2$

Respuestas:

I.- i) $x - \frac{x}{2}$ ii) $2x + x$ iii) $2x + x^2 - \frac{1}{3}\left(2x + x^2\right)$ iv) $\frac{1}{5}x + x^2 - 2$

v) x # menor, y # mayor, $3x + 2y = 7$, $2x + 4 = 3y$

vi) x adultos , y niños, $x + y = 253$, $4x + 1{,}5y = 557$

vii) $E_p = m \times g \times h$; $E_p = 3.234$ viii) $A = a \times b$ ix) $A = a^2$

x) a) $a(a+2)$ b) $(m-3)^3$ c) $\frac{1}{2}(t+2)(t-1)$

xi) a) Área Lateral = $16x^2$, Área Total = $18x^2$, Volumen = $4x^3$

b) Área Lateral = $6x\pi(x-1)$, Área Total = $6x\pi(x-1) + 2\pi(x-1)^2$,

Volumen = $3x\pi(x-1)^2$

II. i) 25 ii) 4 iii) 2014

III. i) a ii) $a^2 - a$ iii) 0 iv) $x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$ v) $-y^2$

IV. 1) a) $2x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 7x - 1$; b) $4x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 6x - 10$

c) $x^4 + x^3 + 10x^2 - 4x + 12$; d) $x^4 - 14x^3 - 37x^2 + 34x - 36$

e) $20x^4 - 22x^3 + 6x^2 - 35x + 31$

2) a) $4a^2 - 8ab + 6ab^2 + 5a^2b - 2$; b) $a^2 + 8b^2 - 6ab - 3ab^2 - 2$

c) $-5a^2 - 4b^2 + 9ab^2 + 9a^2b$; d) $9a^2 + 27b^2 + 28ab - 15a^2b - 2$

e) $-31a^2 + 10ab - 4b^2 - 15ab^2 - 25a^2b - 4$

V. 1) $2x^3 + x^2y + xy^2 - y^3$; 2) $a^5 - a^4 + 5a^3 - 2a^2 - 27a + 10$

3) $15m^5 - 5m^4n - 9m^3n^2 + 3m^2n^3 + 3mn^4 - n^5$; 4) $16x^4 - 24x^2y^2 - 27y^4$

VI i) $C(x) = 5x^2 - 17x + 43$; $R(x) = 59x - 39$;

ii) $C(x) = 2x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{9}{4}$; $R(x) = \frac{19}{4}$;

iii) $C(x) = m^3 + 1$; $R(x) = 0$;

iv) $C(x) = 3x^2 - 6xy - 8y^2$; $R(x) = 0$;