República Bolivariana de Venezuela

Ministerio de la Defensa

Universidad Nacional Experimental Politécnica de la Fuerza Armada

Núcleo Caracas

Curso de Inducción Universitaria CIU

Cátedra: ***Razonamiento Matemático***

EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

GUÍA CIU NRO: 8

COMISIÓN DE APOYO A RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Integrado por:

INTEGRANTES:

Ing. Beliana Gómez
Ing. Elvia Moreno
Ing. Mixef Rojas
Lic. Teresa Gómez
Prof. Neida González

EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

En la Guía # 5, habíamos clasificado las Expresiones Algebraicas según su tipo: Enteras, Racionales, Radicales y Combinadas. En este módulo vamos a trabajar con las Expresiones Algebraicas Racionales y cuya definición es como sigue:

Es el cociente de dos expresiones algebraicas enteras, donde el denominador es diferente de cero.

Ejemplos: $\dfrac{3x^5+5x^3+9}{2x^2}$, $\dfrac{5y^3}{7xy+y^2}$, $\dfrac{4x^2+y}{5y+x}$

1.-Simplificación de Expresiones Racionales:

Simplificar una expresión algebraica racional es transformarla en otra equivalente cuyo numerador y denominador sólo admiten como factor común a 1. Para simplificar una expresión algebraica fraccionaria se siguen los siguientes pasos:

Paso 1: Se factorizan el numerador y el denominador de la expresión.

Paso 2: Se suprimen o cancelan los factores comunes del numerador y del denominador.

Los siguientes ejercicios sirven para ver como simplificamos expresiones racionales.

Ej.14. Simplifique la expresión $\dfrac{4a^2b^2+12a^4b^3-8a^3b^2}{4a^2b}$, en donde $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

Solución:

Factorizamos por factor común la expresión en el numerador, de tal manera que uno de los factores en el numerador sea igual al denominador.

$$\frac{4a^2b^2+12a^4b^3-8a^3b^2}{4a^2b} = \frac{4a^2b\left(b+3a^2b^2-2ab\right)}{4a^2b}$$

$$= \frac{\cancel{4a^2b}\left(b+3a^2b^2-2ab\right)}{\cancel{4a^2b}} = b + 3a^2b^2-2ab$$

Respuesta: $\dfrac{4a^2b^2+12a^4b^3-8a^3b^2}{4a^2b} = b + 3a^2b^2-2ab$

Ej.15. Simplifique la expresión $\dfrac{5x-10}{10x^2-40}$, en donde $x \neq 2$

Solución:

Paso 1: Factorizamos el numerador $5x-10=5(x-2)$

Factorizamos el denominador $10x^2 - 40 = 10(x^2 - 4) = 10(x-2)(x+2)$

Paso 2: Colocamos los factores obtenidos en el numerador y denominador respectivamente:

$$\frac{5x-10}{10x^2-40} = \frac{5(x-2)}{5 \cdot 2\,(x-2)(x+2)}$$ y cancelamos los factores comunes

$$\frac{\cancel{5}\,\cancel{(x-2)}}{\cancel{5} \cdot 2\,\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{1}{2(x+2)}$$

Entonces

Respuesta: $\dfrac{5x-10}{10x^2-40} = \dfrac{1}{2(x+2)}$

<u>**Ej.16.**</u> Simplificar la expresión $\dfrac{4x^3+12x^2+2x+6}{x^2+2x-3}$, donde x ≠ -3 y x ≠ 1.

<u>**Solución:**</u>

Paso 1: Factorizamos el numerador y el denominador

$$= \frac{4x^2(x+3)+2(x+3)}{(x+3)(x-1)}$$

$$= \frac{(x+3)(4x^2+2)}{(x+3)(x-1)}$$

Paso 2: Simplificamos factores iguales

$$= \frac{\cancel{(x+3)}(4x^2+2)}{\cancel{(x+3)}(x-1)} = \frac{4x^2+2}{x-1}$$

Respuesta: $\dfrac{4x^3+12x^2+2x+6}{x^2+2x-3} = \dfrac{4x^2+2}{x-1}$

<u>**Ej.17.**</u> Simplificar la expresión $\dfrac{2x+2-xy-y}{3x+3+xy+y}$, donde $x \neq$ -1 y $y \neq$-3.

<u>**Solución:**</u>

Paso 1: Factorizamos el numerador y el denominador

$$= \frac{2x+2-xy-y}{3x+3+xy+y} = \frac{2(x+1)-y(x+1)}{3(x+1)+y(x+1)}$$

$$= \frac{(x+1)(2-y)}{(x+1)(3+y)}$$

Paso 2: Simplificamos factores iguales

$$\frac{\cancel{(x+1)}(2-y)}{\cancel{(x+1)}(3+y)}=\frac{(2-y)}{(3+y)}$$

Respuesta: $\dfrac{2x+2-xy-y}{3x+3+xy+y}=\dfrac{2-y}{3+y}$

<u>Ej.18.</u> Simplificar la expresión $\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^4-2x^3-7x^2+20x-12}$

<u>Solución:</u>

Paso 1: Factorizamos el numerador y el denominador

$$\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^4-2x^3-7x^2+20x-12}=\frac{(x-2)^2(x+3)}{(x-2)^2(x+3)(x-1)}$$

Método de Ruffini

Paso 2: Simplificamos factores iguales

$$=\frac{\cancel{(x-2)^2}\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x-2)^2}\cancel{(x+3)}(x-1)}=\frac{1}{x-1}$$

Respuesta: $\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^4-2x^3-7x^2+20x-12}=\dfrac{1}{x-1}$

<u>2.-Mínimo Común Múltiplo de Expresiones Algebraicas</u>

El Mínimo común Múltiplo de dos o más expresiones algebraicas es una expresión algebraica de menor coeficiente numérico y de menor grado que es divisible exactamente por cada una de las expresiones dadas.

<u>2.1.-Mínimo Común Múltiplo (m.c.m.) de Monomios:</u>

La secuencia de pasos para hallar el m.c.m. de monomios es la siguiente:

Paso 1: Se halla el m.c.m. de los coeficientes constantes de la expresión.

Paso 2: Se escriben las variables (letras) distintas , sean o no comunes, asignándole a cada variable el mayor exponente que tenga entre las expresiones dadas.

Paso 3: El m.c.m. de los monomios es la multiplicación de los elementos hallados en el Paso 1 y Paso 2.

Veamos a continuación varios ejemplos del cálculo de m.c.m. de monomios:

<u>Ej.19.</u> Hallar el m.c.m. de los siguientes monomios: $3ax^3$, $5a^3x$ y $6a^2x^2$

<u>Solución</u>:

Paso 1: Hallamos el m.c.m. de 3, 5 y 6: m.c.m.(3,5,6) $= 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$

Paso 2: Escribimos las variables y/o letras : a y x, con su mayor exponente: a^3, x^3.

Paso 3: El resultado del m.c.m. de los monomios es la multiplicación de los elementos hallados : $30a^3x^3$

Respuesta: El m.c.m.($3ax^3$, $5a^3x$,$6a^2x^2$)= $30a^3x^3$.

<u>Ej.20.</u> Hallar el m.c.m. de los siguientes monomios: $15mn^2, 10m^2, 20n^3, 25mn^4$,

<u>Solución</u>:

Paso 1: Hallamos el m.c.m. de 15,10,20,25 : m.c.m.(15,10,20,25) $= 3 \cdot 5^2 \cdot 2^2 = 300$

Paso 2: Escribimos las variables y/o letras: m y n, con su mayor exponente: m^2 y n^4.

Paso 3: El resultado del m.c.m. de los monomios es la multiplicación de los elementos hallados : $300m^2n^4$

Respuesta: El m.c.m.($15mn^2, 10m^2, 20n^3, 25mn^4$)= $300m^2n^4$.

<u>Ej.21.</u> Hallar el m.c.m. de los siguientes monomios: $3x^2y^3z$, $4x^3y^3z^2$, $6x^4$:

<u>Solución</u>:

Paso 1: Hallamos el m.c.m. de 3,4 y 6 : m.c.m.(3,4,6) $= 3 \cdot 2^2 = 12$

Paso 2: Escribimos las variables y/o letras : x, y y z, con su mayor exponente: x^4, y^3 y z^2 .

Paso 3: El resultado del m.c.m. de los monomios es la multiplicación de los elementos hallados: $12x^4y^3z^2$

Respuesta: El m.c.m.($3x^2y^3z$, $4x^3y^3z^2$, $6x^4$)= $12x^4y^3z^2$.

<u>2.2.-Mínimo Común Múltiplo (m.c.m.) de Polinomios:</u>

La secuencia de pasos para hallar el m.c.m. de polinomios es la siguiente:

Paso 1: Se factorizan los polinomios, esto se llama descomponer los polinomios en factores primos.

Paso 2: El m.c.m. de los polinomios es el producto de los factores primos, comunes y no comunes con su mayor exponente.

Veamos a continuación varios ejemplos del calculo de m.c.m. de los polinomios:

<u>Ej.22.</u> Hallar el m.c.m. de los siguientes polinomios: $4ax^2 - 8axy + 4ay^2$, $6b^2x - 6b^2y$

<u>Solución</u>:

Paso 1: Primero factorizamos $4ax^2 - 8axy + 4ay^2$

Factor común $4a$

$4ax^2 - 8axy + 4ay^2 = 4a(x^2 - 2xy + y^2)$

$= 4a(x^2 - 2xy + y^2) = 4a(x - y)^2$ $\left(x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \right.$ Producto Notable $\left.\right)$

$= 4a(x^2 - 2xy + y^2) = 2^2 a(x - y)^2$ $\left(4 = 2^2 \right.$ Factores primos $\left.\right)$

Luego factorizamos el segundo polinomio: $6b^2 x - 6b^2 y$

$6b^2 x - 6b^2 y = 6b^2(x - y)$ (Factor común $6b^2$)

$6b^2 x - 6b^2 y = 2 \cdot 3 \cdot b^2 (x - y)$ ($6 = 2 \cdot 3$ Factores primos)

Paso 2: El m.c.m. de los polinomios es el producto de los factores primos comunes: 2 y $(x - y)$ y lo no comunes : 3, a y b, con su mayor exponente, es decir:

el m.c.m. de $(4ax^2 - 8axy + 4ay^2, 6b^2 x - 6b^2 y) = 2^2 \cdot 3 \cdot a \cdot b^2 \cdot (x - y)^2$.

Respuesta: El m.c.m.$(4ax^2 - 8axy + 4ay^2, 6b^2 x - 6b^2 y) = 12ab^2 (x - y)^2$.

<u>**Ej.23.**</u> Hallar el m.c.m. de los siguientes polinomios: $(a^2 - ab + b^2)$, $a^2 - b^2$, $a^2 + 2ab + b^2$ y $(a^2 + b^2)$

<u>**Solución**</u>**:**

Paso 1: Primero factorizamos $(a^2 - ab + b^2)$

$(a^2 - ab + b^2) = (a - b)^2$ (Producto Notable)

Luego factorizamos el segundo polinomio $a^2 - b^2$:

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ (Producto Notable: Suma por diferencia)

Factorizamos el tercer polinomio $a^2 + 2ab + b^2$

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ (Producto Notable)

Y por último el polinomio $(a^2 + b^2)$ no es factorizable (Leer Observación en la Pág. 7, Guía de Factorización) .

Paso 2: El m.c.m. de los polinomios entonces será: el producto de los factores comunes y no comunes con su mayor exponente: $(a - b)^2 (a + b)^2 (a^2 + b^2)$

Respuesta: El m.c.m.$((a^2 - ab + b^2), a^2 - b^2, a^2 + 2ab + b^2, (a^2 + b^2)) =. (a - b)^2 (a + b)^2 (a^2 + b^2)$

Ej.24. Hallar el m.c.m. de los siguientes polinomios: $15x^3+20x^2+5x$, $3x^3-3x+x^2-1$ y $27x^4+18x^3+3x^2$ **.**

Solución:

Paso 1: Primero factorizamos $15x^3+20x^2+5x$

$15x^3+20x^2+5x=5x(3x^2+4x+1)$ [Factor Común $5x$]

$5x(3x^2+4x+1)=5x(3x+1)(x+1)$ [Producto de Binomios]

Luego factorizamos el segundo polinomio $3x^3-3x+x^2-1$:

$3x^3-3x+x^2-1=3x(x^2-1)+(x^2-1)$ (Agrupación de Términos)

$3x(x^2-1)+(x^2-1)=(x^2-1)(3x+1)$ [Factor Común x^2-1]

$(x^2-1)(3x+1)=(x-1)(x+1)(3x+1)$ (Diferencia de Cuadrados $(x^2-1)=(x+1)(x-1)$)

Entonces, $3x^3-3x+x^2-1=(x-1)(x+1)(3x+1)$

Factorizamos el tercer polinomio $27x^4+18x^3+3x^2$

$27x^4+18x^3+3x^2=3x^2(9x^2+6x+1)$ (Factor Común $3x^2$)

$3x^2(9x^2+6x+1)=3x^2(3x+1)^2$ (Trinomio Cuadrado Perfecto)

Entonces, $27x^4+18x^3+3x^2=3x^2(3x+1)^2$

Paso 2: El m.c.m. de los polinomios entonces será: el producto de los factores comunes y no comunes con su mayor exponente: $3\cdot 5x^2(3x+1)^2(x-1)(x+1)$

Respuesta: El m.c.m.($15x^3+20x^2+5x$, $3x^3-3x+x^2-1$, $27x^4+18x^3+3x^2$)

$=.15x^2(3x+1)^2(x-1)(x+1)$

3-Operaciones básicas sobre expresiones algebraicas Racionales:

3.1.-Suma y Resta de expresiones algebraicas Racionales:

Dadas las expresiones algebraicas racionales, para realizar la suma o resta de dichas expresiones vamos a considerar 2 casos

Caso 1: Si tienen el mismo denominador, en el resultado se coloca el denominador común y se suman (o restan) los numeradores.

<u>Ej.25.</u> Resolver $\frac{2x^2-6x+5}{3x+2}+\frac{x^2+5x-11}{3x+2}$

<u>Solución:</u>

$$\frac{2x^2-6x+5}{3x+2}+\frac{x^2+5x-11}{3x+2}=\frac{2x^2-6x+5+x^2+5x-11}{3x+2}$$

Agrupamos términos semejantes y obtenemos:

Respuesta: $\frac{2x^2-6x+5}{3x+2}+\frac{x^2+5x-11}{3x+2}=\frac{3x^2-x-6}{3x+2}$

<u>Ej.26.</u> Resolver $\frac{2-12x}{x^2+9}-\frac{3x^2-15}{x^2+9}$

<u>Solución:</u>

$$\frac{2-12x}{x^2+9}-\frac{3x^2-15}{x^2+9}=\frac{2-12x-(3x^2-15)}{x^2+9}$$

$$\frac{2-12x-3x^2+15}{x^2+9}$$

Agrupamos términos semejantes y obtenemos:

Respuesta: $\frac{2-12x}{x^2+9}-\frac{3x^2-15}{x^2+9}=\frac{17-12x-3x^2}{x^2+9}$

<u>Caso 2:</u> Si tienen denominadores diferentes, seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1: Se simplifican cada una de las fracciones dadas si es posible.

Paso 2: Se factorizan los denominadores de cada uno de los términos racionales

Paso 3: Se halla el m.c.m. de los denominadores, este resultado se coloca como el denominador de la suma algebraica.

Paso 4: Se divide el m.c.m. de los denominadores entre cada denominador y ese resultado se multiplica por su respectivo numerador.

Paso 5: Se resuelve el numerador resultante y se efectúa la suma algebraica (suma o resta) agrupando términos semejantes.

<u>Ej.27.</u> Resolver $\frac{a+3b}{3ab}+\frac{a^2b-4ab^2}{5a^2b^2}$

<u>Solución:</u>

Paso 1: Simplificamos el segundo término de la expresión dada:

$$\frac{a^2b-4ab^2}{5a^2b^2}=\frac{ab(a-4b)}{5a^2b^2} \qquad \left[\text{ Factor Común } ab \right]$$

$$\frac{\cancel{ab}(a-4b)}{5a^{\cancel{2}}b^{\cancel{2}}}=\frac{a-4b}{5ab} \qquad \left[\text{ Simplificamos } ab \right]$$

Y nos queda la siguiente suma: $\frac{a+3b}{3ab}+\frac{a-4b}{5ab}$

Paso 2 y 3: Hallamos el m.c.m. de los denominadores: m.c.m.(3*ab*, 5*ab*) =15*ab* y colocamos este valor como el denominador de la suma

$$\frac{a+3b}{3ab}+\frac{a-4b}{5ab}=\frac{\qquad\qquad}{15ab}$$

Paso 4: Luego dividimos cada uno de los denominadores entre m.c.m. y lo multiplicamos por su numerador respectivo.

$$\frac{a+3b}{3ab}+\frac{a-4b}{5ab}=\frac{5(a+3b)+3(a-4b)}{15ab}$$

Paso 5: Resolvemos el numerador y efectuamos la suma algebraica de los términos.

$$\frac{5(a+3b)+3(a-4b)}{15ab}=\frac{5a+15b+3a-12b}{15ab}=\frac{8a+3b}{15ab}$$

Entonces: **Respuesta:** $\frac{a+3b}{3ab}+\frac{a^2b-4ab^2}{5a^2b^2}=\frac{8a+3b}{15ab}$

<u>Ej.28.</u> Resolver $\frac{1}{3x+3}+\frac{1}{2x-2}+\frac{1}{x^2-1}$

<u>Solución:</u>

Paso 1: Cada uno de los términos está en su mínima expresión.

Paso 2: Factorizamos cada uno de los denominadores de cada uno de los términos:

$3x+3=3(x+1)$; $\quad 2x-2=2(x-1)$; $\quad x^2-1=(x+1)(x-1)$ y nos queda:

$$\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{(x+1)(x-1)}$$

Paso 3: Hallamos el m.c.m. de los denominadores: factores comunes y no comunes con su mayor exponente: m.c.m.= $6(x+1)(x-1)$ y colocamos este valor como el denominador de la suma

$$\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{(x+1)(x-1)}=\frac{\qquad\qquad}{6(x+1)(x-1)}$$

Paso 4: Luego dividimos cada uno de los denominadores entre m.c.m. y lo multiplicamos por su numerador respectivo.

$$\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{(x+1)(x-1)}=\frac{2(x-1)\cdot 1+3(x+1)\cdot 1+6\cdot 1}{6(x+1)(x-1)}$$

Paso 5: Resolvemos el numerador y efectuamos la suma algebraica de los términos.

$$\frac{2(x-1)+3(x+1)+6}{6(x+1)(x-1)}=\frac{2x-2+3x+3+6}{6(x+1)(x-1)}=\frac{5x+7}{6(x+1)(x-1)}$$

Entonces: **Respuesta:** $\frac{1}{3x+3}+\frac{1}{2x-2}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{5x+7}{6(x+1)(x-1)}$

<u>Ej.29.</u> Resolver $\frac{a-1}{a^2-4}+\frac{a-2}{a^2-a-6}+\frac{a+6}{a^2-5a+6}$

<u>Solución:</u>

Paso 1: Cada uno de los términos está en su mínima expresión.

Paso 2: Factorizamos cada uno de los denominadores de cada uno de los términos:

$a^2-4=(a-2)(a+2)$; $a^2-a-6=(a-3)(a+2)$; $a^2-5a+6=(a-3)(a-2)$ y nos queda:

$$\frac{a-1}{a^2-4}+\frac{a-2}{a^2-a-6}+\frac{a+6}{a^2-5a+6}=\frac{a-1}{(a-2)(a+2)}+\frac{a-2}{(a-3)(a+2)}+\frac{a+6}{(a-3)(a-2)}$$

Paso 3: Hallamos el m.c.m. de los denominadores: factores comunes y no comunes con su mayor exponente: m.c.m.= $(a-2)(a+2)(a-3)$ y colocamos este valor como el denominador de la suma

$$\frac{a-1}{(a-2)(a+2)}+\frac{a-2}{(a-3)(a+2)}+\frac{a+6}{(a-3)(a-2)}=\frac{\qquad}{(a-2)(a+2)(a-3)}$$

Paso 4: Luego dividimos cada uno de los denominadores entre m.c.m. y lo multiplicamos por su numerador respectivo.

$$\frac{a-1}{(a-2)(a+2)}+\frac{a-2}{(a-3)(a+2)}+\frac{a+6}{(a-3)(a-2)}=\frac{(a-3)(a-1)+(a-2)(a-2)+(a+6)(a+2)}{(a-2)(a+2)(a-3)}$$

Paso 5: Resolvemos el numerador y efectuamos la suma algebraica de los términos.

$$\frac{(a-3)(a-1)+(a-2)(a-2)+(a+6)(a+2)}{(a-2)(a+2)(a-3)}=\frac{a^2-4a+3+a^2-4a+4+a^2+8a+12}{(a-2)(a+2)(a-3)}$$

$$=\frac{3a^2+19}{(a-2)(a+2)(a-3)}$$

Entonces: **Respuesta:** $\frac{a-1}{a^2-4}+\frac{a-2}{a^2-a-6}+\frac{a+6}{a^2-5a+6}=\frac{3a^2+19}{(a-2)(a+2)(a-3)}$

Ej.30. Resolver $\dfrac{2}{x+x^2}-\dfrac{1}{x-x^2}-\dfrac{1-3x}{x-x^3}$

Solución:

Paso 1: Cada uno de los términos está en su mínima expresión.

Paso 2: Factorizamos cada uno de los denominadores de cada uno de los términos:

$x+x^2=x(1+x)$; $x-x^2=x(1-x)$; $x-x^3=x(1-x^2)=x(1-x)(1+x)$ y nos queda:

$$\frac{2}{x+x^2}-\frac{1}{x-x^2}-\frac{1-3x}{x-x^3}=\frac{2}{x(1+x)}-\frac{1}{x(1-x)}-\frac{1-3x}{x(1-x)(1+x)}$$

Paso 3: Hallamos el m.c.m. de los denominadores: factores comunes y no comunes con su mayor exponente: m.c.m.= $x(1+x)(1-x)$ y colocamos este valor como el denominador de la suma

$$\frac{2}{x(1+x)}-\frac{1}{x(1-x)}-\frac{1-3x}{x(1-x)(1+x)}=\frac{\quad}{x(1+x)(1-x)}$$

Paso 4: Luego dividimos cada uno de los denominadores entre m.c.m. y lo multiplicamos por su numerador respectivo.

$$\frac{2}{x(1+x)}-\frac{1}{x(1-x)}-\frac{1-3x}{x(1-x)(1+x)}=\frac{(1-x)\cdot 2-(1+x)\cdot 1-1\cdot(1-3x)}{x(1+x)(1-x)}$$

Paso 5: Resolvemos el numerador y efectuamos la suma algebraica de los términos.

$$\frac{(1-x)\cdot 2-(1+x)\cdot 1-1\cdot(1-3x)}{x(1+x)(1-x)}=\frac{2-2x-1-x-1+3x}{x(1+x)(1-x)}$$

$$=\frac{0}{x(1+x)(1-x)}=0$$

Entonces: **Respuesta:** $\dfrac{2}{x+x^2}-\dfrac{1}{x-x^2}-\dfrac{1-3x}{x-x^3}=0$

Ej.31. Resolver $\dfrac{x-2}{x^2-x}-\dfrac{x+3}{x^2+3x-4}+\dfrac{x^2+12x+16}{x^4+3x^3-4x^2}$

Solución:

Paso 1: Cada uno de los términos está en su mínima expresión.

Paso 2: Factorizamos cada uno de los denominadores de cada uno de los términos:

$x^2-x=x(x-1)$; $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$; $x^4+3x^3-4x^2=x^2(x^2+3x-4)=x^2(x+4)(x-1)$

y nos queda:

$$\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{x+3}{x^2+3x-4}+\frac{x^2+12x+16}{x^4+3x^3-4x^2}=\frac{x-2}{x(x-1)}-\frac{x+3}{(x+4)(x-1)}+\frac{x^2+12x+6}{x^2(x+4)(x-1)}$$

Paso 3: Hallamos el m.c.m. de los denominadores: factores comunes y no comunes con su mayor exponente: m.c.m.= $x^2(x+4)(x-1)$ y colocamos este valor como el denominador de la suma

$$\frac{x-2}{x(x-1)}-\frac{x+3}{(x+4)(x-1)}+\frac{x^2+12x+6}{x^2(x+4)(x-1)}=\frac{\qquad}{x^2(x+4)(x-1)}$$

Paso 4: Luego dividimos cada uno de los denominadores entre m.c.m. y lo multiplicamos por su numerador respectivo.

$$\frac{x-2}{x(x-1)}-\frac{x+3}{(x+4)(x-1)}+\frac{x^2+12x+6}{x^2(x+4)(x-1)}=\frac{x(x+4)(x-2)-x^2(x+3)+1\cdot(x^2+12x+6)}{x^2(x+4)(x-1)}$$

Paso 5: Resolvemos el numerador y efectuamos la suma algebraica de los términos.

$$\frac{x(x+4)(x-2)-x^2(x+3)+1\cdot(x^2+12x+6)}{x^2(x+4)(x-1)}=\frac{x^3+2x^2-8x-x^3-3x^2+x^2+12x+6}{x^2(x+4)(x-1)}$$

$$=\frac{4x+6}{x^2(x+4)(x-1)}$$

Entonces: **Respuesta:** $\dfrac{x-2}{x^2-x}-\dfrac{x+3}{x^2+3x-4}+\dfrac{x^2+12x+16}{x^4+3x^3-4x^2}=\dfrac{4x+6}{x^2(x+4)(x-1)}$

3.2.-Producto de expresiones algebraicas Racionales:

Para multiplicar varias expresiones algebraicas racionales se aplica el siguiente proceso:

Paso 1: Se descomponen en factores tanto los numeradores como los denominadores de cada expresión racional a multiplicar.

Paso 2: Multiplican los numeradores de las expresiones y los denominadores de las expresiones.

Paso 3: Se simplifican, suprimiendo los factores comunes en los numeradores y denominadores.

Ej.32. Resolver $\dfrac{2a}{2b^2}\times\dfrac{3b^2}{4x}\times\dfrac{x^2}{2a^2}$

Solución:

Paso 1: Cada uno de los factores está en su mínima expresión y están factorizados:

Paso 2: Multiplicamos los numeradores y denominadores respectivamente:

$$\frac{2a}{2b^2}\times\frac{3b^2}{4x}\times\frac{x^2}{2a^2}=\frac{2a\cdot 3b^2\cdot x^2}{2b^2\cdot 4x\cdot 2a^2}$$

$$=\frac{6ab^2x^2}{16b^2xa^2}$$

Paso 3: Se simplifican, suprimiendo los factores comunes en los numeradores y denominadores.

$$\frac{\overset{3}{\cancel{6}}\cancel{a}\cancel{b^2}x^{\cancel{2}}}{\underset{8}{\cancel{16}}\cancel{b^2}\cancel{x}a^{\cancel{2}}}=\frac{3x}{8a}$$

Entonces: **Respuesta:** $\frac{2a}{2b^2}\times\frac{3b^2}{4x}\times\frac{x^2}{2a^2}=\frac{3x}{8a}$

<u>Ej.33.</u> Resolver $\frac{a^2-1}{a^2+2a}\times\frac{a^2-a-6}{3a^2+7a+4}\times\frac{3a+4}{a^2-4a+3}$

<u>Solución:</u>

Paso 1: Factorizar los numeradores y denominadores de cada una de las expresiones racionales a multiplicar:

$\frac{a^2-1}{a^2+2a}=\frac{(a-1)(a+1)}{a(a+2a)}$; $\frac{a^2-a-6}{3a^2+7a+4}=\frac{(a-6)(a+1)}{(3a+4)(a+1)}$ y $\frac{3a+4}{a^2-4a+3}=\frac{(3a+4)}{(a-3)(a-1)}$, entonces :

$$\frac{a^2-1}{a^2+2a}\times\frac{a^2-a-6}{3a^2+7a+4}\times\frac{3a+4}{a^2-4a+3}=\frac{(a-1)(a+1)}{a(a+2)}\times\frac{(a-3)(a+2)}{(3a+4)(a+1)}\times\frac{(3a+4)}{(a-3)(a-1)}$$

Paso 2: Multiplicamos los numeradores y denominadores respectivamente:

$$\frac{(a-1)(a+1)}{a(a+2)}\times\frac{(a-3)(a+2)}{(3a+4)(a+1)}\times\frac{(3a+4)}{(a-3)(a-1)}=\frac{(a-1)(a+1)(a-3)(a+2)(3a+4)}{a(a+2)(3a+4)(a+1)(a-3)(a-1)}$$

Paso 3: Se simplifican, suprimiendo los factores comunes en los numeradores y denominadores.

$$\frac{\cancel{(a-1)}\cancel{(a+1)}\cancel{(a-3)}\cancel{(a+2)}\cancel{(3a+4)}}{a\cancel{(a+2)}\cancel{(3a+4)}\cancel{(a+1)}\cancel{(a-3)}\cancel{(a-1)}}$$

$$=\frac{1}{a}$$

Entonces: **Respuesta:** $\frac{a^2-1}{a^2+2a}\times\frac{a^2-a-6}{3a^2+7a+4}\times\frac{3a+4}{a^2-4a+3}=\frac{1}{a}$

Muchas veces se piden realizar multiplicación de facciones mixtas, las cuales contienen sumas o restas que luego se multiplican. Veamos a continuación algunos ejemplos:

<u>Ej.34.</u> Resolver $\left(a+3-\dfrac{5}{a-1}\right)\times\left(a-2+\dfrac{5}{a+4}\right)$

<u>Solución:</u>

Paso 0: Reducimos las expresiones mixtas a fracciones:

Empezamos con : $\left(a+3-\dfrac{5}{a-1}\right)=\dfrac{(a-3)(a-1)-5}{a-1}$

Y resolvemos el numerador de la expresión:

$$\frac{(a+3)(a-1)-5}{a-1}=\frac{a^2+2a-3}{a-1}=\frac{a^2+2a-8}{a-1}$$

Seguimos con $\left(a-2+\dfrac{5}{a+4}\right)=\dfrac{(a-2)(a+4)+5}{a+4}$

Y resolvemos el numerador de la expresión:

$$\frac{(a-2)(a+4)+5}{a+4}=\frac{a^2+2a-8+5}{a+4}=\frac{a^2+2a-3}{a+4}$$

Entonces tenemos: $\left(a+3-\dfrac{5}{a-1}\right)\times\left(a-2+\dfrac{5}{a+4}\right)=\dfrac{a^2+2a-8}{a-1}\times\dfrac{a^2+2a-3}{a+4}$

Paso 1: Factorizar los numeradores y denominadores de cada una de las expresiones racionales a multiplicar:

$$\frac{a^2+2a-8}{a-1}=\frac{(a+4)(a-2)}{(a-1)} \quad \text{y} \quad \frac{a+2a-3}{a+4}=\frac{(a+3)(a-1)}{(a+4)}\text{, entonces :}$$

$$\frac{a^2+2a-8}{a-1}\times\frac{a^2+2a-3}{a+4}=\frac{(a+4)(a-2)}{(a-1)}\times\frac{(a+3)(a-1)}{(a+4)}$$

Paso 2: Multiplicamos los numeradores y denominadores respectivamente:

$$\frac{(a+4)(a-2)}{(a-1)}\times\frac{(a+3)(a-1)}{(a+4)}=\frac{(a+4)(a-2)(a+3)(a-1)}{(a-1)(a+4)}$$

Paso 3: Se simplifican, suprimiendo los factores comunes en los numeradores y denominadores.

$$\frac{(\cancel{a+4})(a-2)(a+3)(\cancel{a-1})}{(\cancel{a-1})(\cancel{a+4})}=(a-2)(a+3)=a^2+a-6$$

Entonces: **Respuesta:** $\left(a+3-\dfrac{5}{a-1}\right)\times\left(a-2+\dfrac{5}{a+4}\right)=a^2+a-6$

3.3.-Recíproco de una fracción.

Para toda fracción $\frac{a}{b}$, donde *a* y *b* son diferentes de cero, las fracciones $\frac{a}{b}$ *y* $\frac{b}{a}$ cumplen la siguiente relación:

$$(\frac{a}{b})\times(\frac{b}{a})=\frac{a\times b}{b\times a}=\frac{a\times b}{a\times b}=1$$

decimos entonces que $\frac{b}{a}$ es el ***recíproco o inverso multiplicativo*** de $\frac{a}{b}$ y viceversa.

Así por ejemplo, el recíproco de $\frac{3x}{4a}$ es $\frac{4a}{3x}$; el recíproco de $\frac{x^2-4}{5x+3}$ *es* $\frac{5x+3}{x^2-4}$; el recíproco de $\frac{1}{2x+3}$ *es* $2x+3$ y el recíproco de $\frac{-2a+3}{-3b^2+6}$ *es* $\frac{-3b^2+6}{-2a+3}$.

3.4-División de expresiones algebraicas Racionales:

Para dividir dos expresiones algebraicas racionales:

Paso 1: Se transforma la división en multiplicación del dividendo, por el recíproco del divisor, es decir :

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

Paso 2: Se aplican los mismos pasos que se sugieren en el producto de fracciones (3.2.):

Paso 2.1. : Se descomponen en factores tanto los numeradores como los denominadores de cada expresión racional a multiplicar.

Paso 2.2. : Multiplican los numeradores de las expresiones y los denominadores de las expresiones.

Paso 2.3. : Se simplifican, suprimiendo los factores comunes en los numeradores y denominadores.

Veamos a continuación varios ejemplos:

Ej.35. Resolver $\frac{4a^2}{3b^2}\div\frac{2ax}{9b^3}$

Solución:

Paso 1: Se transforma la división en multiplicación del dividendo por el recíproco del divisor, es decir:

$$\frac{4a^2}{3b^2}\div\frac{2ax}{9b^3}=\frac{4a^2}{3b^2}\times\frac{9b^3}{2ax}$$

Paso 2.2 : Multiplicamos los numeradores y denominadores respectivamente:

$$\frac{4a^2}{3b^2}\times\frac{9b^3}{2ax}=\frac{4a^2\cdot 9b^3}{3b^2\cdot 2ax}=\frac{36a^2b^3}{6b^2ax}$$

Paso 2.3: Se simplifican, suprimiendo los factores comunes en los numeradores y denominadores.

$$\frac{3\cancel{6}\,a^{\cancel{2}}\,b^{\cancel{3}}}{\cancel{6}\,\cancel{b^2}\,\cancel{a}\,x}=\frac{6ab}{x}$$

Entonces: **Respuesta:** $\dfrac{4a^2}{3b^2}\div\dfrac{2ax}{9b^3}=\dfrac{6ab}{x}$

<u>Ej.36.</u> Resolver $\dfrac{a^2+4a}{8}\div\dfrac{a^2-16}{4}$

<u>Solución:</u>

Paso 1: Se transforma la división en multiplicación del dividendo por el recíproco del divisor, es decir:

$$\frac{a^2+4a}{8}\div\frac{a^2-16}{4}=\frac{a^2+4a}{8}\times\frac{4}{a^2-16}$$

Paso 2.2 : Multiplicamos los numeradores y denominadores respectivamente:

$$\frac{a^2+4a}{8}\times\frac{4}{a^2-16}=\frac{4(a^2+4a)}{8(a^2-16)}$$

Paso 2.3: Se factorizan tanto el numerador como el denominador y se simplifican, suprimiendo los factores comunes en los numeradores y denominadores.

$$\frac{4(a^2+4a)}{8(a^2-16)}=\frac{\cancel{4}a\cdot\cancel{(a+4)}}{\underset{2}{\cancel{8}}(a-4)\cancel{(a+4)}}=\frac{a}{2(a-4)}$$

Entonces: **Respuesta:** $\dfrac{a^2+4a}{8}\div\dfrac{a^2-16}{4}=\dfrac{a}{2(a-4)}$

<u>Ej.37.</u> Resolver $\dfrac{x^3-4x^2-x+4}{2x+6}\div\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+5x+6}$

<u>Solución:</u>

Paso 1: Se transforma la división en multiplicación del dividendo por el recíproco del divisor, es decir:

$$\frac{x^3-4x^2-x+4}{2x+6}\div\frac{2x^2-x-1}{x^2+5x+6}=\frac{x^3-4x^2-x+4}{2x+6}\times\frac{x^2+5x+6}{2x^2-x-1}$$

Paso 2.2 : Multiplicamos los numeradores y denominadores respectivamente:

$$\frac{x^3-4x^2-x+4}{2x+6}\times\frac{x^2+5x+6}{2x^2-x-1}=\frac{(x^3-4x^2-x+4)\cdot(x^2+5x+6)}{(2x+6)\cdot(2x^2-x-1)}$$

Paso 2.3: Se factorizan tanto el numerador como el denominador y se simplifican, suprimiendo los factores comunes en los numeradores y denominadores.

$$\frac{(x^3-4x^2-x+4)\cdot(x^2+5x+6)}{(2x+6)\cdot(2x^2-x-1)}=\frac{\cancel{(x-1)}(x-4)(x+1)\cancel{(x+3)}(x+2)}{2\cancel{(x+3)}\cdot(2x+1)\cancel{(x-1)}}=\frac{(x-4)(x+1)(x+2)}{2(2x+1)}$$

Entonces: **Respuesta:** $\dfrac{x^3-4x^2-x+4}{2x+6}\div\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+5x+6}=\dfrac{(x-4)(x+1)(x+2)}{2(2x+1)}$

<u>Ej.38.</u> Resolver $\left(n-\dfrac{n^2}{n-m}\right)\div\left(1+\dfrac{m^2}{n^2-m^2}\right)$

<u>Solución:</u>

Primero resolvemos lo que está entre paréntesis:

$$\left(n-\frac{n^2}{n-m}\right)=\left(\frac{n(n-m)-n^2}{n-m}\right)=\left(\frac{n^2-nm-n^2}{n-m}\right)=-\frac{nm}{n-m}$$

$$\left(1+\frac{m^2}{n^2-m^2}\right)=\left(\frac{(n^2-m^2)\cdot1+m^2}{n^2-m^2}\right)=\left(\frac{n^2-m^2+m^2}{n^2-m^2}\right)=\left(\frac{n^2}{n^2-m^2}\right)$$ y nos queda:

$$\left(-\frac{nm}{n-m}\right)\div\left(\frac{n^2}{n^2-m^2}\right)$$

Paso 1: Se transforma la división en multiplicación del dividendo por el recíproco del divisor, es decir:

$$\left(-\frac{nm}{n-m}\right)\div\left(\frac{n^2}{n^2-m^2}\right)=\left(-\frac{nm}{n-m}\right)\times\left(\frac{n^2-m^2}{n^2}\right)$$

Paso 2.2 : Multiplicamos los signos y luego los numeradores y denominadores respectivamente:

$$\left(-\frac{nm}{n-m}\right)\times\left(\frac{n^2-m^2}{n^2}\right)=-\frac{nm\cdot\left(n^2-m^2\right)}{n^2(n-m)}$$

Paso 2.3: Se factorizan tanto el numerador como el denominador y se simplifican, suprimiendo los factores comunes en los numeradores y denominadores.

$$-\frac{nm\cdot\left(n^2-m^2\right)}{n^2(n-m)}=-\frac{\cancel{n}\cdot m\cdot\cancel{(n-m)}(n+m)}{n^{\cancel{2}}\cancel{(n-m)}}$$

Entonces: **Respuesta:** $\left(n-\dfrac{n^2}{n-m}\right)\div\left(1+\dfrac{m^2}{n^2-m^2}\right)=-\dfrac{m(n+m)}{n}$

4.-Ejercicios Propuestos:

I.- Hallar el m.c.m. de los siguientes polinomios:

1.) an^3, $2n$, $n^2x^2+n^2y^2$, $nx^2+2nxy+ny^2$ R: $2an^3(x^2+y^2)(x+y)$

2.) $8x^2$, x^3+x^2-6x, $2x^3-8x^2+8x$, $4x^3+24x^2+36x$ R: $8x^2(x+3)^2(x-2)^2$

3.) $3x^3$, x^3+1, $2x^2-2x+2$, $6x^3+6x^2$ R: $6x^3(x+1)(x^2-x+1)$

4.) $4xy^2$, $3x^3-3x^2$, $a^2+2ab+b^2$, $ax-a+bx-b$ R: $12x^2y^2(a+b)^2(x-1)$

5.) $2a$, $4b$, $6a^2b$, $12a^2-24ab+12b^2$, $5ab^3-5b^4$ R: $60a^2b^3(a-b)^2$

6.) $28x$, x^2+2x+1, x^2+1, $7x^2+7$, $14x+14$ R: $28x(x+1)^2(x^2+1)$

II.- Resolver las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{3}{x+11}+\dfrac{8}{x+11}$	R: $\dfrac{11}{x+11}$
b) $\dfrac{3}{2x+5}+\dfrac{2}{2x-5}$	R: $\dfrac{10x-5}{(2x+5)(2x-5)}$
c) $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{3}{x-1}$	R: $\dfrac{6x}{(x+1)(x-1)}$
d) $\dfrac{6}{2x-6}+\dfrac{9x}{x^2-6x+9}$	R: $\dfrac{3x^2}{(x-3)^2}$
e) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$	R: $\dfrac{x+1}{x^2}$
f) $\dfrac{2x}{x^2-9}+\dfrac{2}{x-3}$	R: $\dfrac{4x+6}{(x+3)(x-3)}$
g) $\dfrac{2x}{x-6}+\dfrac{3x}{x^2-5x-6}$	R: $\dfrac{2x^2+5x}{(x-6)(x+1)}$
h) $\dfrac{3-x}{x+3}+\dfrac{x-3}{x+3}$	R: 0

i)	$\frac{5}{2x+5}+\frac{5}{2x-5}-\frac{3}{4x^2-25}$	R: $\frac{20x-3}{(2x-5)(2x+5)}$
j)	$\frac{3x}{x+4}-\frac{8x}{x^2-16}$	R: $\frac{3x^2-20x+6}{(x+4)(x-4)}$
k)	$\frac{2p^2}{p+5}-\frac{7p}{p^2-25}$	R: $\frac{6p^3-30p^2-7p}{(p+5)(p-5)}$
l)	$\frac{5}{x}-\frac{x-1}{x^3}$	R: $\frac{5x^2-x+1}{x^3}$
m)	$\frac{x}{y}\cdot\frac{3x^2y^3}{x-1}$	R: $\frac{3x^3y^2}{(x-1)}$
n)	$\frac{2x+2}{4x^2+2x}\cdot\frac{x}{x+3}$	R: $\frac{1}{(x+3)}$
o)	$\frac{4-x}{x+1}\cdot\frac{x^2-x-10}{x^2-16}$	R: $\frac{x-6}{(x+4)}$
p)	$\frac{x^2+2x-80}{x^2-100}\cdot\frac{x-9x-10}{x^3-4x-32}$	R: $\frac{x+1}{x+4}$
q)	$\frac{a^2+ab}{ab-b^2}\cdot\frac{b^2}{a^3-b^3}\cdot\frac{a^2-2ab+b^2}{b}$	R: $\frac{a^2+ab}{a^2+ab+b^2}$
r)	$\frac{x^2-1}{x^2-9}\cdot\frac{3x-9}{3x+3}$	R: $\frac{x-1}{(x+3)}$
s)	$\frac{x^2-5x+6}{3x-15}\cdot\frac{6x}{x^2-x-30}\cdot\frac{x^2-25}{2x-4}$	R: $\frac{1}{x+2}$
t)	$\frac{3x+3}{2x+1}\div\frac{x+1}{4x+2}$	R: 6
u)	$\frac{a^2-1}{2a}\div\frac{a+1}{a}$	R: $\frac{a-1}{2}$
v)	$\frac{x^2-2x+1}{x+1}\div\frac{x-1}{x^2-1}$	R: $(x-1)^2$
w)	$\frac{m^2+2m-15}{m}\div m-3$	R: $\frac{m+5}{m}$

x) $y^2-1\div\dfrac{1}{y^2+1}$	R: $(y+1)(y-1)(y^2+1)$
y) $\dfrac{x-y}{2}\div\dfrac{x^3-y^3}{2x}$	R: $\dfrac{x}{x^2+xy+y^2}$
z) $\dfrac{x^3-121x}{16x^2-9}\div\dfrac{x^2-11x}{4x+3}$	R: $\dfrac{x+11}{4x-3}$
aa) $\dfrac{x^2+x-2}{x^3-x}\div\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+x}$	R: $\dfrac{1}{x+2}$
bb) $\dfrac{6a^2}{a^2+6ab+9b^2}\div\dfrac{5a^3}{a^2b+3ab^2}$	R: $\dfrac{3b}{5(a+3b)}$
cc) $\left(\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{y^2}{x-y}\right)\div\dfrac{x^2}{x-y}$	R: 1
dd) $\dfrac{\dfrac{a-b}{a+b}-\dfrac{a+b}{a-b}}{\dfrac{ab}{a-b}}$	R: $-\dfrac{4}{a+b}$
ee) $\dfrac{n-\dfrac{n^2}{n-m}}{1+\dfrac{m^2}{n^2-m^2}}$	R: $-\dfrac{m}{n}$
ff) $\dfrac{\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{3}{x^2-4}}{\dfrac{3}{x-2}}$	R: $\dfrac{x-5}{3(x+2)}$
gg) $\dfrac{1-x-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}$	R: $-\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$